

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**«КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК
В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ»**

Выполнил студент
443-й группы
Копчинский Илья Дмитриевич

подпись студента

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Сатунин Пётр Сергеевич

подпись научного руководителя

Допущена к защите _____ мая 2022
Зав.кафедрой _____
подпись зав.кафедрой

Москва

2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Обзор литературы	5
1. Классическое описание	6
1.0. Система единиц	6
1.1. Поправки к уравнениям поля	6
1.2. Метод поиска резонирующих мод	9
1.3. Резонатор-отрезок	12
1.3.1. Одномодовый режим	14
1.3.2. Двухмодовый режим	15
1.4. Резонатор-параллелепипед	16
1.4.1. Одномодовый режим	18
1.4.2. Двухмодовый режим	19
1.4.3. Частный случай	22
1.5. Подытог	24
2. Квантовое описание	27
2.1. Свободное электромагнитное поле	27
2.1.1. Резонатор-отрезок	28
2.1.2. Резонатор-параллелепипед	30
2.1.3. Состояния свободного поля	31
2.2. Самодействующее электромагнитное поле	31
2.2.1. Процесс 3 в 1	33
2.2.2. Процесс 2+1 в 1	34
2.2.3. Когерентная генерация	36
ВЫВОДЫ	41
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	42
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	43

ВВЕДЕНИЕ

В конце XIX века Джеймс Клерк Максвелл обобщил накопленные к тому времени экспериментальные данные об электромагнитном взаимодействии и сформулировал свою знаменитую систему уравнений, претерпевшую впоследствии лишь формальные изменения и ставшую основой классической электродинамики. Далее в работах Фейнмана, Швингера, Томонаги, Дайсона и др. получила развитие квантовая электродинамика (КЭД). Многие её предсказания, уточняющие и расширяющие классическую теорию, не раз подтверждались экспериментально. КЭД предсказывает самодействие электромагнитного поля в вакууме, полностью отсутствующее в классической электродинамике. Самодействие является следствием радиационных поправок, включающих в себя вклады от виртуальных электрон-позитронных пар.

На умеренных частотах чисто квантовый эффект фотон-фотонного рассеяния может быть описан в терминах эффективной теории Эйлера-Гейзенберга [1, 2]. Другие эффекты нелинейной электродинамики включают двойное вакуумное лучепреломление и вакуумный дихроизм электромагнитной волны на интенсивном классическом фоне [3, 4]. Помимо вклада теории Эйлера-Гейзенберга, эффективное самодействие электромагнитного поля возникает вследствие присутствия в полном лагранжиане скалярных или псевдоскалярных полей, взаимодействующих с электромагнитным полем [5—7].

Однако до сих пор не было зарегистрировано взаимодействие реальных фотонов, предсываемое эффективной теорией Эйлера-Гейзенберга. Причина кроется в крайней малости константы связи самодействия электромагнитного поля. Тем не менее, было предпринято несколько попыток протестировать его нелинейную динамику в сверхсильных электромагнитных полях. Наиболее близко к явлению подошёл эксперимент по поляризации интенсивных лазерных полей «PVLAS» [8, 9]. Результирующая чувствительность к самодействию электромагнитного поля оказалась всего лишь на порядок меньше, чем требовалось согласно предсказаниям эффективной теории Эйлера-Гейзенберга [9].

Современные технологии приблизили к воплощению очередную возможность регистрации нелинейной динамики электромагнитного поля. Новая методика предполагает использование высокоинтенсивных мод в резонаторах вместо лазерных полей. Идея такого эксперимента была предложена ещё в 2000-х годах [10, 11]: одиночный сверхпроводящий резонатор возбуждается двумя различными гармониками большой амплитуды — модами «накачки» известных частот. При наличии самодействия ожидается генерация третьей «сигнальной» моды, чья частота является простой линейной комбинацией частот исходных мод. В силу чрезвычайной малости эффекта, сигнальная мода может быть зафиксирована только после резонансного усиления в полости. Кроме резонансного усиления, необходимо генерировать гармонику высшей частоты, как можно дальше отстоящей от основных частот (частот мод накачки). Это позволит настроить узкую полосу пропускания детектора на сигнальную частоту, чтобы

эффективно выделить её из фона мод накачки.

Аналогичное применение одиночного сверхпроводящего резонатора для поиска псевдоскалярных аксионоподобных частиц было предложено в [12]¹: в случае тяжёлой новой частицы, (когда её масса сильно превышает² частоты мод накачки), проявление новой физики сводится к эффективному самодействию электромагнитного поля и интерферирует с самодействием Эйлера-Гейзенберга. В частности, обнаружение более сильного самодействия, чем в предсказании свободной КЭД с радиационными поправками, может свидетельствовать о наличии в природе аксионоподобных частиц. Таким образом, генерация высших гармоник за счёт нелинейной электродинамики актуальна не только для проверки предсказаний КЭД, но и для поиска новой физики в скалярном секторе.

Как упоминалось выше, перспективный эксперимент по детектированию самодействия электромагнитного поля в одиночном сверхпроводящем резонаторе рассматривается в работах [10—12]. В них не приводится явное решение нелинейных волновых уравнений, описывающих резонансное усиление сигнальной моды. В последних статьях теоретически исследуется генерация высших гармоник в одномерном [17] и двумерном [18] резонаторах. Данные результаты основаны на явном решении нелинейных уравнений поля и приводят к необычному заключению: сигнальная мода с устроенной частотой не усиливается резонансно.

Целями данного исследования являются проверка и уточнение вышеупомянутых результатов, их обобщение на трёхмерную модель резонатора, а также поиск причины и объяснение континуитивного поведения электромагнитного поля в резонаторах (отсутствие генерации некоторых высших частот). Для достижения этих целей и теоретического описания генерации высших гармоник в нелинейной электродинамике Эйлера-Гейзенберга с позиций классической и квантовой теорий поля ставятся следующие задачи: вывод поправок к уравнениям Максвелла и волновым уравнениям на классическом уровне (в лагранжиевом формализме), развитие универсального для различных резонаторов классического подхода к поиску резонансно усиливаемых сигнальных мод (по теории возмущений на основе методов математической физики), применение разработанного алгоритма к изучению нескольких конфигураций одномерного и трёхмерного резонаторов; операторное квантование свободного электромагнитного поля в резонаторах и расчёт амплитуд этих же процессов на квантовом уровне (через S-матрицу), а также финальное сравнение результатов классической и квантовой теорий по их предсказаниям равновесной энергии сигнальных мод в резонаторе, и сравнение с результатами сторонних работ.

Структурно данная работа состоит из трёх частей: классическое описание (раздел 1.), включающее в себя вывод поправок к уравнениям поля (часть 1.1.) и

¹Обобщение на скалярные частицы и дополнительный член, нарушающий СР-симметрию, рассмотрены в [13].

²В случае же малой массы аксионоподобной частицы актуален похожий эксперимент, но с двумя резонаторами, предложенный в [14—16].

решение нелинейных уравнений по теории возмущений (часть 1.2.); квантовое описание (раздел 2.), содержащее операторное квантование электромагнитного поля и расчёт амплитуд процессов через S -матрицу; сравнение и обсуждение результатов в выводах и заключении. Классический и квантовый формализмы применяются в случаях одномерного и трёхмерного резонаторов с двумя вариантами возбуждения каждого.

Обзор литературы

Основы классической электродинамики изложены в трудах Максвелла [19], а также в многочисленных учебных пособиях, например, в [20—23]. Квантовая электродинамика чаще рассматривается как составляющая квантовой теории поля [24—26]. Эффективная теория Эйлера-Гейзенберга выводится в оригинальных работах [1, 2], а более обширный исторический обзор также даётся в [27]. Внимание другим эффектам нелинейной электродинамики, таким как двойное вакуумное лучепреломление и вакуумный дихроизм электромагнитной волны на интенсивном классическом фоне, уделяется в работах [3, 4]. Нелинейное поведение электромагнитного поля, индуцированное наличием скалярных или псевдоскалярных полей в полном лагранжиане, рассматривается, в частности, в [5—7]. Эксперимент «PVLAS», приблизившийся к регистрации нелинейного поведения электромагнитного поля, описан в [8, 9]. Идея другого эксперимента, использующего одиночный сверхпроводящий резонатор, предлагается в работах [10, 11] и исследуется теоретически в низших размерностях [17, 18]. В целях поиска аксионоподобных частиц рассматриваются аналогичные схемы опытов [12, 14—16].

1. Классическое описание

В первой части работы генерация высших гармоник рассматривается с позиций классической теории поля. Сначала в лагранжевом формализме выводятся из теории Эйлера-Гейзенберга нелинейные поправки к уравнениям Максвелла и волновым уравнениям (часть 1.1.). Затем разрабатывается общий для резонаторов разных размерностей подход к решению полученных уравнений (часть 1.2.). Применение теории возмущений и методов математической физики позволяет сформулировать критерий резонанса сигнальных мод, который впоследствии проверяется для одномерного (часть 1.3.) и трёхмерного (часть 1.4.) резонаторов. Анализ нескольких конфигураций мод накачки — способов возбуждения резонаторов — приводит к неожиданным промежуточным заключениям, представленным в части 1.5.

1.0. Система единиц

В данном исследовании используется «естественная» рационализированная система единиц, в которой кладутся безразмерными и единичными скорость света $c = 1$, приведённая постоянная Планка $\hbar = 1$ и постоянная Больцмана $k_B = 1$. Универсальной единицей измерения в такой системе является единица измерения энергии, по умолчанию равная 1 ГэВ. При такой договорённости, время и длина измеряются в обратных единицах ГэВ $^{-1}$, масса, частота и сама энергия — в единицах ГэВ. Силовые характеристики и напряжённости полей в вакууме — в единицах ГэВ 2 . Выбор $\hbar = 1$ обеспечивает, в частности безразмерность функционала действия, а размерность плотности функции Лагранжа обратна размерности пространства-времени.

Фактор 4π в электродинамических формулах присутствует в законе Кулона, определяя тем самым постоянную тонкой структуры $\alpha_e := \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$, и отсутствует в лагранжиане свободного электромагнитного поля $\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

1.1. Поправки к уравнениям поля

Согласно теории Эйлера-Гейзенберга, эффективный лагранжиан электромагнитного поля в приближении слабых полей ($|\mathbf{E}|, |\mathbf{B}| \ll m_e^2/e \sim 10^9$ Тл) даётся выражением:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{ЕН}} = -\frac{1}{4}\mathcal{F} + \kappa(\mathcal{F}^2 + \beta\mathcal{G}^2), \quad \kappa = \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}, \quad \beta = \frac{7}{4}. \quad (1)$$

Лагранжиан (1) сконструирован из инвариантов электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &:= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \\ \mathcal{G}(x) &:= F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} = -4(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (2)$$

сохраняющихся при преобразованиях Лоренца. Константа связи κ содержит четвёртую степень массы электрона m_e в знаменателе, что есть «визитная карточка» эффективной неперенормируемой теории, применимой до характерного энергетического масштаба $\sim m_e$. В эксперименте с электромагнитным полем амплитуды $|\mathbf{B}| < 1$ Тл связь крайне слаба: $\kappa B^2 < 10^{-24}$. Коэффициент β в точности равен $\frac{7}{4}$ в теории Эйлера-Гейзенберга, но ввиду гипотетического вклада массивных аксионоподобных частиц, упоминавшегося во введении, целесообразно не сужать общность рассмотрения.

Следуя лагранжеву формализму, будем варьировать действие по 4-потенциалу электромагнитного поля $A_\mu(x)$, чтобы получить уравнения поля с кубичной по $F_{\mu\nu}$ поправкой (так как член $\mathcal{L}_{\text{ЕН}} \propto F_{\mu\nu}^4$):

$$\begin{aligned} S = \int \mathcal{L} d^4x \quad \Rightarrow \quad \delta S = \int \delta \mathcal{L} d^4x &= \int \left(-\frac{1}{4} \delta \mathcal{F} + 2\kappa (\mathcal{F} \delta \mathcal{F} + \beta \mathcal{G} \delta \mathcal{G}) \right) d^4x \\ \delta \mathcal{F} = \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) &= 2F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 4F^{\mu\nu} \partial_\mu(\delta A_\nu) \\ \delta \mathcal{G} = \frac{1}{2} \delta(\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}) &= 2\tilde{F}^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 4\tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu(\delta A_\nu) \\ \delta S &= \int \left(-F^{\mu\nu} + 8\kappa (\mathcal{F} F^{\mu\nu} + \beta \mathcal{G} \tilde{F}^{\mu\nu}) \right) \partial_\mu(\delta A_\nu) d^4x \\ \delta S &= \oint \left(-F^{\mu\nu} + 8\kappa (\mathcal{F} F^{\mu\nu} + \beta \mathcal{G} \tilde{F}^{\mu\nu}) \right) \delta A_\nu \Big|_{x^\mu=-\infty}^{x^\mu=+\infty} d^3\Sigma_\mu - \\ &\quad - \int \partial_\mu \left(-F^{\mu\nu} + 8\kappa (\mathcal{F} F^{\mu\nu} + \beta \mathcal{G} \tilde{F}^{\mu\nu}) \right) \delta A_\nu d^4x \end{aligned}$$

В последнем равенстве после интегрирования по частям возник поверхностный интеграл. Подынтегральное выражение в нём обращается в ноль в подстановке в силу того, что мы решаем задачу с «закреплёнными концами» — в терминах вариации 4-потенциала $\delta A_\nu(t = \pm\infty, \mathbf{r}) = 0$, и с граничным условием $F_{\mu\nu}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

По принципу наименьшего (точнее, стационарного) действия потребуем выполнения $\delta S = 0$ независимо от произвольной вариации $\delta A_\nu(x)$, удовлетворяющей условиями вариационной задачи. Тогда по основной лемме вариационного исчисления (лемме Лагранжа) получим первую пару уравнений эволюции электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \left(-F^{\mu\nu} + 8\kappa (\mathcal{F} F^{\mu\nu} + \beta \mathcal{G} \tilde{F}^{\mu\nu}) \right) &= 0 \\ \nu = 0 : \quad \partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_\mu \left(8\kappa (\mathcal{F} F^{\mu 0} + \beta \mathcal{G} \tilde{F}^{\mu 0}) \right) \\ \nu = j : \quad \partial_\mu F^{\mu j} &= \partial_\mu \left(8\kappa (\mathcal{F} F^{\mu j} + \beta \mathcal{G} \tilde{F}^{\mu j}) \right) \end{aligned}$$

Вторая пара уравнений следует, как и в классической электродинамике, из самого определения тензора электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu, \nu, \rho$$

Далее нам будет удобно работать с трёхмерными величинами в декартовом базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, поэтому вновь воспользуемся определением тензора электромагнитного поля, чтобы перейти к трёхмерной форме записи:

$$\begin{aligned} F^{i0} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_i, & \tilde{F}^{i0} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_i, & F^{ij} &= -\epsilon_{ijk}\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_k, & \tilde{F}^{ij} &= +\epsilon_{ijk}\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_k \\ \nu = 0 : & \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (8\kappa(\mathcal{F}\mathbf{E} + \beta\mathcal{G}\mathbf{B})) =: -\nabla \cdot \mathbf{P} \\ \nu = j : & \quad -\partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (8\kappa(\mathcal{F}\mathbf{B} - \beta\mathcal{G}\mathbf{E})) + \partial_t \mathbf{P} =: \partial_t \mathbf{P} - \nabla \times \mathbf{M} \end{aligned}$$

Вторая пара уравнение остаётся ровно такой же, как в классической электродинамике. Объединяя обе пары уравнений, собираем систему уравнений Максвелла с поправками Эйлера-Гейзенберга:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{M} \right], & \nabla \cdot \mathbf{E} &= [-\nabla \cdot \mathbf{P}], \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где функции $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{M}(t, \mathbf{r})$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= 16\kappa[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\mathbf{E} + 2\beta(\mathbf{E}, \mathbf{B})\mathbf{B}], \\ \mathbf{M} &= 16\kappa[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\mathbf{B} - 2\beta(\mathbf{E}, \mathbf{B})\mathbf{E}]. \end{aligned} \tag{4}$$

Можно заметить, что слагаемые, взятые в квадратные скобки в уравнениях Максвелла (3), легко трактовать, как объёмные плотности токов и зарядов, возникающие вследствие квантовых поправок. В связи с этой интерпретацией напрашивается сравнение вакуума с материальной средой, и вектор \mathbf{P} называют вектором поляризации вакуума, а вектор \mathbf{M} — вектором магнетизации (намагничения) вакуума. Как и следовало ожидать, полученные поправки кубичны по полям (4). Такая нелинейность приводит к нарушению принципа суперпозиции и кубичному смешению частот распространяющихся в вакууме волн. Однако стоит отметить, что плоская волна и даже суперпозиция коллинеарно распространяющихся плоских волн по-прежнему является точным решением (3), так как для неё выполнено $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{G} = 0$, и квантовые поправки исчезают.

Наконец, получим модифицированные волновые уравнения. Для этого стандартно подействуем оператором $\nabla \times$ на уравнения в первом столбце системы (3), упрощая выражения снова с помощью равенств (3):

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\partial_t \nabla \times \mathbf{B}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \partial_t \mathbf{P} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{M}), \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\partial_t^2 \mathbf{E} - \partial_t^2 \mathbf{P} + \nabla \times \partial_t \mathbf{M}, \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = -\partial_t^2 \mathbf{B} + \nabla \times \partial_t \mathbf{P} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \Delta \mathbf{M}, \\ \square \mathbf{E} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) - \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \\ \square \mathbf{B} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \Delta \mathbf{M}. \end{cases} \tag{5}$$

1.2. Метод поиска резонирующих мод

Выведенные волновые уравнения (5) нелинейны, так как их правые части состоят из производных от векторов поляризации и магнетизации вакуума, зависящих, вообще говоря, кубичным образом от полей (4). Как уже упоминалось, точным решением будет суперпозиция плоских волн, чьи волновые векторы коллинеарны. Однако нас интересует случай $\mathcal{F} \neq 0$ и особенно $\mathcal{G} \neq 0$, чтобы в эксперименте могла проявиться нелинейная динамика электромагнитного поля. Поэтому будем решать нелинейные уравнения (5) по теории возмущений, используя себе во благо чрезвычайную малость самодействия поля в условиях лабораторного эксперимента ($\kappa B^2 < 10^{-24}$ при $|B| < 1$ Тл).

Рассмотрим эволюцию электромагнитного поля в резонаторе. Пусть в нём поддерживаются какие-либо собственные колебания большой амплитуды (моды накачки) E^{pump}, B^{pump} . Суммарные поля E, B будут подчиняться нелинейным уравнениям (5). Для развития теории возмущений запишем суммарные поля в виде $E = E^{pump} + E^{sig}$, $B = B^{pump} + B^{sig}$, где слагаемые E^{sig}, B^{sig} отвечают сигнальным модам и являются малыми возмущениями на фоне мод накачки. После подстановки указанного разложения в уравнения (5), они очевидным образом линеаризуются, и мы получаем в нулевом и первом порядках¹ теории возмущений:

$$\begin{aligned} \text{Нулевой порядок:} \quad & \square E^{pump} = 0, & \square B^{pump} = 0, \\ \text{Первый порядок:} \quad & \square E^{sig} = F^{el}(t, r), & \square B^{sig} = F^{mg}(t, r), \end{aligned} \quad (6)$$

где правые части F^{el} и F^{mg} определяются по формулам (7):

$$\begin{aligned} F^{el}(t, r) &:= \nabla \times \frac{\partial M^{pump}}{\partial t} + \nabla(\nabla \cdot P^{pump}) - \frac{\partial^2 P^{pump}}{\partial t^2}, \\ F^{mg}(t, r) &:= \nabla \times \frac{\partial P^{pump}}{\partial t} - \nabla(\nabla \cdot M^{pump}) + \Delta M^{pump}. \end{aligned} \quad (7)$$

В нулевом порядке мы получаем классические волновые уравнения на моды накачки E^{pump} и H^{pump} , поэтому их эволюция стандартна и известна. Так как правые части уравнений в первом порядке рассчитываются, как явные функции (7) векторов $P^{pump} = P(E^{pump}, B^{pump})$ и $M^{pump} = M(E^{pump}, B^{pump})$, то функции F^{el}, F^{mg} оказываются известными функциями координат и времени. Физическая ситуация такова, что вакуум поляризуется и намагничивается модами накачки гораздо сильнее, чем сигнальными модами, поэтому можно считать, что моды накачки суть внешние поля с точки зрения эволюции сигнальных мод. Итак, эволюция мод накачки считается классической, а поведение сигнальных мод диктуется линейными неоднородными волновыми уравнениями (6), которые мы будем для краткости называть *сигнальными* уравнениями.

¹Учёт высших порядков теории возмущений не имеет практического смысла, так как они дают поправки в амплитуду по величине $< 10^{-48}$ от мод накачки, что гарантирует их ненаблюдаемость в современных лабораторных условиях.

Применяя классические методы математической физики [23], будем решать линейное неоднородное волновое уравнение для произвольного сигнального поля $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ в резонаторе D с границей ∂D . Для поля $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ имеются граничные условия, определяемые физической моделью резонатора. Будем работать с моделью идеально проводящих стенок, которая накладывает условие нормальности электрического поля к поверхности резонатора $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{0}$ и условие ортогональности магнитного поля $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0$ к нормали \mathbf{n} во всех граничных точках $\mathbf{r} \in \partial D$ в произвольный момент времени $t \in \mathbb{R}$. Первое условие запрещает электрическому полю возбуждать поверхностный ток в идеально проводящих стенках; в противном случае он быстро вызвал бы такое перераспределение заряда, которое погасило бы тангенциальную компоненту электрического поля. Второе условие ограничивает силовые линии магнитного поля внутри резонатора, запрещая им проникать наружу.

Естественно, модель идеально проводящих стенок лишь ограниченно применима в эксперименте. Малое, но конечное сопротивление стенок приводит к затратам энергии поля на разогрев резонатора и тем самым ограничивает его добротность $Q < \infty$. Современная лабораторная техника [28] достигает добротности $Q \leq 10^{11}$ в сверхпроводящих радиочастотных резонаторах. Учтём наличие диссипации, добавляя в левую часть уравнений «трение» в виде феноменологического члена с первой производной $\Gamma \Omega \partial_t$, где $\Gamma = 1/Q \ll 1$. В качестве характерной частоты Ω будем брать частоту сигнальной моды ω_{sig} , так как нас интересует добротность именно в этом диапазоне частот. Неоднозначность выбора частоты Ω можно спрятать в величину добротности, которая фиксируется оценочно с точностью до порядка. Тогда возбуждение сигнального поля $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ из нулевого начального состояния будет описываться задачей:

$$\begin{cases} (\square + \Gamma \Omega \partial_t) \mathbf{f}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D, t > 0, \\ \mathbf{f}(0, \mathbf{r}) = \mathbf{0}, & \mathbf{r} \in D, \\ \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \partial D, t > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Пусть область D при поставленных граничных условиях имеет полную (в гильбертовом пространстве) ортогональную систему собственных функций. Ортогональность определяется выбранным скалярным произведением гильбертова пространства $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_D \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$. Система собственных функций резонатора $\{\mathcal{E}_k(\mathbf{r})\}_{k=1}^{\infty}$ с собственными значениями ω_k^2 , находится из задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} (\Delta + \omega_k^2) \mathcal{E}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, & \mathbf{r} \in D, \\ \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathcal{E}_k(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \partial D. \end{cases} \quad (9)$$

В последующих разделах будут явно даны системы собственных функций резонаторов, в которых изучается генерация высших гармоник.

Решение $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ исходной задачи (8) можно искать методом разделения пе-

ременных (методом Фурье) в виде разложения по собственным функциям:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \mathcal{E}_k(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Подставим анзац (10) в уравнение задачи (8) и спроектируем левую и правую части уравнения на собственную функцию $\mathcal{E}_n(\mathbf{r})$, чтобы получить обыкновенные дифференциальные уравнения на коэффициенты разложения $f_n(t)$:

$$\begin{aligned} & (\partial_t^2 - \Delta + \Gamma\Omega\partial_t) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \mathcal{E}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ddot{f}_k(t) \mathcal{E}_k(\mathbf{r}) - f_k(t) \underbrace{\Delta \mathcal{E}_k(\mathbf{r})}_{=-\omega_k^2 \mathcal{E}_k(\mathbf{r})} + \Gamma\Omega \dot{f}_k(t) \mathcal{E}_k(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ddot{f}_k(t) + \Gamma\Omega \dot{f}_k(t) + \omega_k^2 f_k(t) \right) \mathcal{E}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \quad | \cdot \mathcal{E}_n(\mathbf{r}) \\ & \ddot{f}_n(t) + \Gamma\dot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = F_n(t), \quad F_n(t) := \frac{(\mathbf{F}, \mathcal{E}_n)}{\|\mathcal{E}_n\|^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее нас интересует возможность резонансного усиления сигнальной моды $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$, что эквивалентно наличию резонанса в каком-либо из уравнений (11). Предположим, $F_n(t)$ (проекция неоднородности $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$ на n -ю собственную функцию) содержит исследуемую гармонику, чья частота Ω совпадает с собственной частотой ω_n . Тогда данная гармоника будет «генерироваться», то есть резонансно усиливаться в Q раз по амплитуде:

$$\begin{aligned} F_n(t) = a_n e^{i\omega_n t} & \Rightarrow \text{ возьмём анзац } f_n(t) = A_n e^{i\omega_n t} \\ A_n (i\omega_n)^2 e^{i\omega_n t} + \Gamma\Omega(i\omega_n) e^{i\omega_n t} + \omega_n^2 A_n e^{i\omega_n t} & = a_n e^{i\omega_n t} \quad | \cdot e^{-i\omega_n t} \\ A_n = \frac{a_n}{i\Gamma\Omega\omega_n} = a_n \frac{-iQ}{\omega_n^2} & \Rightarrow |A_n| \gg \frac{|a_n|}{\omega_n^2} \end{aligned}$$

Если теперь представить правую часть $F_n(t)$ в виде ряда или интеграла Фурье — разложения в спектр по времени, то можно сформулировать критерий генерации сигнальной моды на частоте ω_{sig} :

- I. частота ω_{sig} попадает на спектр резонатора ($\exists m \in \mathbb{N} : \omega_{\text{sig}} = \omega_m$),
- II. временнóй спектр проекции $F_m(t)$ содержит частоту ω_{sig} (в составе ряда или интеграла Фурье).

Этот критерий работает для любого резонатора, чья физическая модель удовлетворяет математическим требованиям применимости метода Фурье. Если

моды накачки, служащие источником возбуждения $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$, зависят от времени гармонически, то их пространственные проекции $F_m(t)$ также будут гармоничны по времени, и условие II сведётся к поиску слагаемых $\sin(\omega_{\text{sig}} t)$ и/или $\cos(\omega_{\text{sig}} t)$ в составе $F_m(t)$.

Выработанный подход используется в последующих разделах классической части исследования. Сначала выбираются моды накачки \mathbf{E}^{pump} и \mathbf{B}^{pump} — как правило, в виде линейной комбинации собственных функций изучаемого резонатора. Затем по заданным модам накачки рассчитываются правые части \mathbf{F}^{el} и \mathbf{F}^{mg} . Потом проверяется условие I резонанса: среди сигнальных частот, возникающих вследствие смешивания частот накачки, выбираются гармоники с частотами $\omega_{\text{sig}} = \omega_m$, попадающие на спектр резонатора. Далее вычисляются соответствующие проекции $F_m(t)$ и проверяется условие II резонанса. Выполнение критерия служит конструктивным доказательством теоретической возможности генерации гармоники ω_{sig} ; для доказательства невозможности приходится перебирать всевозможные сигнальные частоты и искать нарушение условий критерия резонанса.

1.3. Резонатор-отрезок

Рассмотрим генерацию высших гармоник в простейшей одномерной модели резонатора — отрезке, ограниченном двумя идеально проводящими пластинами, чьи линейные размеры много больше длины резонатора L_x . Основным допущением одномерной модели является зависимость электромагнитного поля только от одной пространственной координаты и времени. Это немедленно приводит к ортогональности электрического и магнитного полей к оси резонатора (см. рис. 1).

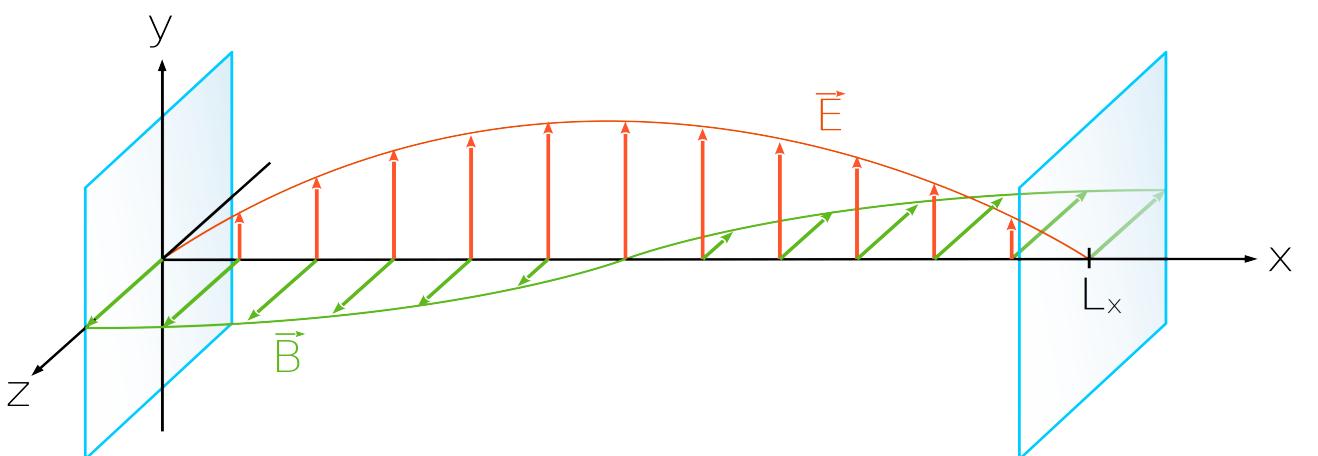


Рисунок 1 — Одномерный резонатор с идеально проводящими стенками.

В самом деле, если $\mathbf{E}^{\text{pump}} = \mathbf{E}^{\text{pump}}(t, x)$, то $\partial_t B_x^{\text{pump}} = -(\nabla \times \mathbf{E}^{\text{pump}})_x = \partial_z E_y^{\text{pump}}(t, x) - \partial_y E_z^{\text{pump}}(t, x) = 0$, откуда $\forall t B_x^{\text{pump}} = B_x^{\text{pump}}(x) = 0$, так как мы предполагаем резонатор не намагниченным. Аналогично из зависимости

$\mathbf{B}^{\text{pump}} = \mathbf{B}^{\text{pump}}(t, x)$ следует, что $\partial_t E_x^{\text{pump}} = (\nabla \times \mathbf{B}^{\text{pump}})_x = 0$, и в любой момент времени $E_x^{\text{pump}} = E_x^{\text{pump}}(x) = 0$ в предположении электрически нейтрального резонатора. Наконец, равенство нулю продольных компонент мод накачки обеспечивает такое же поведение векторов поляризации и магнетизации вакуума (4), которые, в свою очередь, транслируют это свойство на неоднородности (7) линеаризованных сигнальных уравнений.

Итак, пусть резонатор D — интервал $(0, L_x)$. Условие $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ в граничных точках «закрепляет концы» электрического поля, то есть приводит к задаче Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями Дирихле на собственные функции $\mathcal{E}_n(x)$. Граничное условие $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ выполнено тождественно в силу вышеупомянутой поперечности магнитного поля, поэтому задача на магнитные собственные функции $\mathcal{M}_n(x)$ имеет однородные граничные условия Неймана. С учётом классических уравнений Максвелла, действующих для мод накачки, система собственных функций одномерного резонатора принимает следующий вид¹:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_n(x) = \sin(k_n x) \mathbf{e}_y, \\ \mathcal{M}_n(x) = \cos(k_n x) \mathbf{e}_z, \end{cases}, \quad \omega_n = k_n = \frac{\pi n}{L_x}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

где $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — орты координатных осей Oy, Oz соответственно. Функции (12) обладают свойством ортогональности:

$$(\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m) = \delta_{nm} \frac{L_x}{2}, \quad (\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_m) = \delta_{nm} \frac{L_x}{2}.$$

Физический смысл собственных функций (12) прост: моды резонатора суть пространственные части стоячих плоских волн, устанавливающихся между двумя идеально проводящими (зеркальными) пластинами. Чтобы поля, сконструированные умножением (12) на временную экспоненту $e^{i\omega_n t}$, образовывали плоскую волну, надо добавлять фазу i перед магнитным полем (либо фазу $-i$ перед электрическим):

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathcal{E}_n(x) e^{i\omega_n t}, \\ \mathbf{B} = i\mathcal{M}_n(x) e^{i\omega_n t}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \sin(k_n x)}{\partial x} e^{i\omega_n t} \cdot \mathbf{e}_z = -i\mathcal{M}_n \frac{\partial e^{i\omega_n t}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = -i \frac{\partial \cos(k_n x)}{\partial x} e^{i\omega_n t} \cdot \mathbf{e}_y = \mathcal{E}_n \frac{\partial e^{i\omega_n t}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Наличие у электромагнитного поля двух степеней свободы приводит к двум независимым поляризациям мод накачки. Специфичным для отрезка является то, что векторы поляризаций поля могут быть получены друг из друга поворотом вокруг оси симметрии резонатора. Следовательно, при суперпозиции нескольких мод накачки их плоскости поляризации могут составлять произвольный угол друг с другом.

¹Для математической полноты системе (12) не хватает нулевой моды (с частотой $\omega_0 = 0$), однако мы не рассматриваем статические поля, предполагая резонатор электрически нейтральным и не намагниченным.

1.3.1. Одномодовый режим

Будем возбуждать одномерный резонатор линейно поляризованными модами накачки на какой-либо одной собственной частоте ω_n (одномодовый режим):

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{pump}}(t, x) = B_0 \operatorname{Re}\{-i\mathcal{E}_n(x) e^{i\omega_n t}\} = B_0 \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{B}^{\text{pump}}(t, x) = B_0 \operatorname{Re}\{\mathcal{M}_n(x) e^{i\omega_n t}\} = B_0 \cos(k_n x) \cos(\omega_n t) \mathbf{e}_z. \end{cases} \quad (13)$$

В такой конфигурации инвариант $\mathcal{F} \neq 0$, в то время как $\mathcal{G} \equiv 0$. Применяя алгоритм раздела 1.2., подставим (13) в (4) и (7), осуществив тривиальные, хотя и громоздкие вычисления¹. В результате найдём неоднородности (7) волновых уравнений для возбуждаемых сигнальных мод:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{el}}(t, x) &= 8\kappa B_0^3 \omega_n^2 [2 \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) + \sin(3k_n x) \sin(\omega_n t) - 3 \sin(k_n x) \sin(3\omega_n t)] \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{F}^{\text{mg}}(t, x) &= 8\kappa B_0^3 \omega_n^2 [2 \cos(k_n x) \cos(\omega_n t) + 3 \cos(3k_n x) \cos(\omega_n t) - \cos(k_n x) \cos(3\omega_n t)] \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (14)$$

Проанализируем неоднородности (14) согласно выработанному критерию резонанса. Временной спектр содержит только две гармоники с сигнальными частотами $\omega_{\text{sig}} \in \{\omega_n, 3\omega_n\}$. Очевидно, обе частоты попадают на спектр резонатора, например, $3\omega_n = \omega_{3n}$, поэтому условие I резонанса выполнено. Для проверки условия II резонанса спроектируем функции \mathbf{F}^{el} , \mathbf{F}^{mg} на собственные функции с номерами n и $3n$, отвечающие найденным сигнальным частотам:

$$\begin{aligned} F_n^{\text{el}}(t) &= \frac{(\mathbf{F}^{\text{el}}, \mathcal{E}_n)}{\|\mathcal{E}_n\|^2} = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} F^{\text{el}}(t, x) \sin(k_n x) dx = 8\kappa B_0^3 \omega_n^2 [2 \sin(\omega_n t) - 3 \sin(3\omega_n t)], \\ F_n^{\text{mg}}(t) &= \frac{(\mathbf{F}^{\text{mg}}, \mathcal{M}_n)}{\|\mathcal{M}_n\|^2} = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} F^{\text{mg}}(t, x) \cos(k_n x) dx = 8\kappa B_0^3 \omega_n^2 [2 \cos(\omega_n t) - \cos(3\omega_n t)], \\ F_{3n}^{\text{el}}(t) &= \frac{(\mathbf{F}^{\text{el}}, \mathcal{E}_{3n})}{\|\mathcal{E}_{3n}\|^2} = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} F^{\text{el}}(t, x) \sin(k_{3n} x) dx = 8\kappa B_0^3 \omega_n^2 [\sin(\omega_n t)], \\ F_{3n}^{\text{mg}}(t) &= \frac{(\mathbf{F}^{\text{mg}}, \mathcal{M}_{3n})}{\|\mathcal{M}_{3n}\|^2} = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} F^{\text{mg}}(t, x) \cos(k_{3n} x) dx = 8\kappa B_0^3 \omega_n^2 [3 \cos(\omega_n t)]. \end{aligned}$$

В последующих разделах результат вычисления проекций будет организован в таблицы вида 1. Столбцы нумеруются индексами собственных функций, на которые проецируются неоднородности \mathbf{F}^{el} и \mathbf{F}^{mg} , отвечающие строкам таблицы. Каждая клетка таблицы описывает спектральный состав проекции на собственную функцию, соответствующую данному столбцу. Информация о ненулевых амплитудах гармоник не отражена в таблице, но и несущественна для проверки критерия резонанса, так как опущенные амплитуды являются величинами одного порядка малости.

¹Здесь и далее символные вычисления [29] проведены в системе компьютерной алгебры «wxMaxima 21.02.0».

	n	$3n$
\mathbf{F}^{el}	ω_n, ω_{3n}	ω_n
\mathbf{F}^{mg}	ω_n, ω_{3n}	ω_n

Таблица 1 — Проверка критерия резонанса для одномерного резонатора в одномодовом режиме.

Итак, в случае возбуждения резонатора-отрезка в одномодовом режиме имеет место резонансное усиление сигнальной частоты ω_n , которая сохранилась во временном спектре проекций на собственные функции с индексом n . Единственная высшая гармоника утроенной частоты $3\omega_n$ не генерируется¹, так как для неё не выполнено второе условие критерия резонанса. Она «не выживает» в скалярных произведениях с собственными функциями $\mathcal{E}_{3n}, \mathcal{M}_{3n}$.

1.3.2. Двухмодовый режим

Теперь изучим возбуждение резонатора-отрезка линейно поляризованными модами накачки на двух частотах: ω_n и ω_p (двухмодовый режим). Так как отрезок обладает вращательной симметрией вокруг оси Ox , допустим наличие произвольного угла α между плоскостями поляризации мод:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{pump}}(t, x) = B_0 \operatorname{Re} \left\{ -i\mathcal{E}_n(x) e^{i\omega_n t} - i\hat{\mathbf{R}}_{x\alpha} \mathcal{E}_p(x) e^{i\omega_p t} \right\}, \\ \mathbf{B}^{\text{pump}}(t, x) = B_0 \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{M}_n(x) e^{i\omega_n t} + \hat{\mathbf{R}}_{x\alpha} \mathcal{M}_p(x) e^{i\omega_p t} \right\}, \end{cases} \quad \hat{\mathbf{R}}_{x\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (15)$$

В выбранной конфигурации оба инварианта (2) отличны от нуля, и вычисления становятся слишком объёмными, чтобы полностью выписывать здесь их результаты. Аналогично предыдущему разделу по формулам (4) и (7) на модах накачки (15) рассчитываются неоднородности $\mathbf{F}^{\text{el}}, \mathbf{F}^{\text{mg}}$ сигнальных уравнений. Так как поправки (4) кубично нелинейны по полям накачки, в спектральном составе неоднородностей можно ожидать рождение не более, чем следующих сигнальных частот:

$$\omega_{\text{sig}} \in \{\omega_n, \omega_p, 3\omega_n, 3\omega_p, 2\omega_n \pm \omega_p, 2\omega_p \pm \omega_n\}. \quad (16)$$

Все сигнальные частоты (16) попадают на спектр резонатора-отрезка, потому что зависимость собственной частоты от индекса линейна $\omega_n = \frac{\pi n}{L_x}$. Значит, условие I критерия резонанса выполняется для каждой потенциально рождающей гармоники.

¹Данный вывод согласуется с независимым результатом [17].

Далее требуется спроектировать неоднородности на собственные функции с индексами $n, p, 3n, 3p, 2n \pm p, 2p \pm n$ и проверить, сохранились ли соответствующие сигнальные частоты в спектрах проекций. Спектральный состав проекций приведен в таблице 2:

	n	$3n$	$2n - p$	$2n + p$
\mathbf{F}^{el}				
\mathbf{F}^{mg}	$\omega_n, \omega_{2p \pm n}, \omega_{3n}$	ω_n	ω_p, ω_{2n+p}	ω_p, ω_{2n-p}

	p	$3p$	$2p - n$	$2p + n$
\mathbf{F}^{el}				
\mathbf{F}^{mg}	$\omega_p, \omega_{2n \pm p}, \omega_{3p}$	ω_p	ω_n, ω_{2p+n}	ω_n, ω_{2p-n}

Таблица 2 — Проверка критерия резонанса для одномерного резонатора в двухмодовом режиме.

Из таблицы 2 легко видеть, что условие II критерия резонанса выполняется только для сигнальных частот ω_n и ω_p , совпадающих с частотами накачки. Значит, и в случае двухмодового режима возбуждения резонатора-отрезка генерация высших гармоник за счёт самодействия электромагнитного поля невозможна.

1.4. Резонатор-параллелепипед

Изучим генерацию высших гармоник в более реалистичной модели трёхмерного резонатора — параллелепипеда (см. рис. 2) с длинами сторон L_x, L_y, L_z (объём $V = L_x L_y L_z$) и идеально проводящей поверхностью.

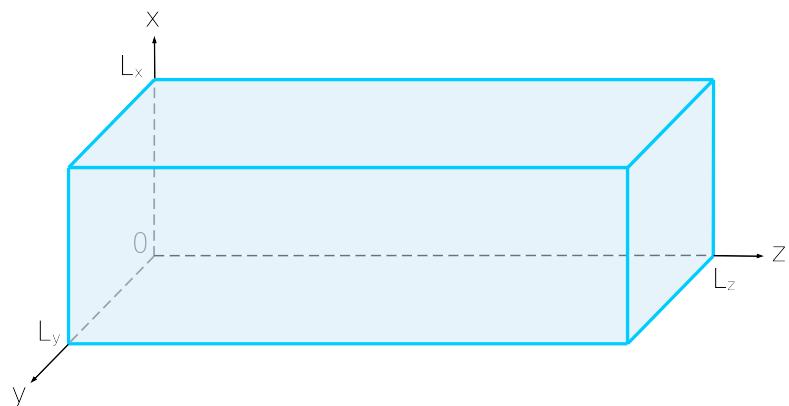


Рисунок 2 — Трёхмерный резонатор с идеально проводящими стенками.

В следующих подразделах нам понадобится система собственных функций резонатора. Электрические и магнитные собственные функции $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ и $\mathcal{M}(\mathbf{r})$ области $D = (0, L_x) \times (0, L_y) \times (0, L_z)$ при условиях идеально проводящих стенок находятся из задач Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} (\Delta + \omega^2)\mathcal{E}(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in D, \\ \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathcal{E}(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \partial D, \end{cases} \quad \begin{cases} (\Delta + \omega^2)\mathcal{M}(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in D, \\ \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathcal{M}(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in \partial D, \end{cases} \quad (17)$$

при дополнительном условии $\nabla \times \mathcal{E}_\omega = \omega \mathcal{M}_\omega$, которое обеспечивает необходимую для плоской волны связь между электрическим и магнитным полем. Благодаря этому дополнительному условию плоские стоячие волны могут быть сконструированы умножением функций $\mathcal{E}, i\mathcal{M}$ на временную экспоненту $e^{i\omega t}$.

Классические решения задач (17) находятся методом разделения пространственных переменных $\mathbf{r} = (x, y, z)$, в результате чего трёхмерная задача разбивается на прямое произведение трёх одномерных. Получаемые одномерные задачи имеют однородные граничные условия Дирихле либо Неймана, и их решениями являются синусы либо косинусы соответственно. Следовательно, собственные функции $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ и $\mathcal{M}(\mathbf{r})$ нумеруются тройкой индексов n, p, q и зависят от координат тригонометрически.

Далее восстанавливается связь $\nabla \times \mathcal{E}_\omega = \omega \mathcal{M}_\omega$ путём выбора амплитуд отдельных компонент вектор-функций $\mathcal{E}_i, \mathcal{M}_j, i, j \in \{x, y, z\}$. Спецификой параллелепипеда является способ реализации в нём двух степеней свободы, заложенных в природе электромагнитного поля. Наличие двух независимых поляризаций выражается в двоякой возможности удовлетворить связь $\nabla \times \mathcal{E}_\omega = \omega \mathcal{M}_\omega$ и порождает две подсистемы собственных функций: TE-моды и TM-моды. Классификация ведётся относительно произвольно выбранной оси Oz : электрическое поле TE-мод имеет $\mathcal{E}_z^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = 0$, в то время как магнитное поле TM-мод подчинено условию $\mathcal{M}_z^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = 0$ в любой точке $\mathbf{r} \in D$.

Итак, в граничных условиях идеально проводящих стенок система собственных функций резонатора-параллелепипеда распадается на два подмножества — TM- и TE-моды [23, сс. 25–28]:

$$\mathcal{E}_{npq}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{4(2 - \delta_{q0})}}{\omega_{npq}} \begin{pmatrix} \frac{k_x k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ \frac{k_y k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ -\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathcal{M}_{npq}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \times \mathcal{E}_{npq}^{\text{TM}}(\mathbf{r})}{\omega_{npq}}, \quad n, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_0,$$

$$\mathcal{E}_{npq}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = \sqrt{4(2 - \delta_{n0} - \delta_{p0})} \begin{pmatrix} +\frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ -\frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathcal{M}_{npq}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \times \mathcal{E}_{npq}^{\text{TE}}(\mathbf{r})}{\omega_{npq}}, \quad n, p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N} \quad (\text{но } n + p > 0),$$

при следующих обозначениях и вытекающих свойствах:

$$k_x(n) = \frac{\pi n}{L_x}, \quad k_y(p) = \frac{\pi p}{L_y}, \quad k_z(q) = \frac{\pi q}{L_z}, \quad \omega_{npq} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{p^2}{L_y^2} + \frac{q^2}{L_z^2}},$$

$$(\mathcal{E}_{npq}^{\text{TM}}, \mathcal{E}_{n'p'q'}^{\text{TM}}) = (\mathcal{M}_{npq}^{\text{TM}}, \mathcal{M}_{n'p'q'}^{\text{TM}}) = \delta_{nn'} \delta_{pp'} \delta_{qq'} V,$$

$$(\mathcal{E}_{npq}^{\text{TE}}, \mathcal{E}_{n'p'q'}^{\text{TE}}) = (\mathcal{M}_{npq}^{\text{TE}}, \mathcal{M}_{n'p'q'}^{\text{TE}}) = \delta_{nn'} \delta_{pp'} \delta_{qq'} V,$$

$$(\mathcal{E}_{npq}^{\text{TE}}, \mathcal{E}_{n'p'q'}^{\text{TM}}) = (\mathcal{M}_{npq}^{\text{TE}}, \mathcal{M}_{n'p'q'}^{\text{TM}}) = 0.$$

Последнее скалярное произведение, понимаемое как интеграл по объёму резонатора, говорит об ортогональности ТМ- и ТЕ-подсистем собственных функций. Нормировочные множители $\sqrt{4(2 - \delta_{q0})}$ и $\sqrt{4(2 - \delta_{n0} - \delta_{p0})}$ в (18) и (19) требуются вследствие того, что квадрат нормы косинуса нулевого аргумента, возникающего при наличии нулевых индексах мод, в два раза больше, чем квадрат нормы осциллирующего косинуса. Важно помнить, что в ТЕ-модах индексы n и p не могут обращаться в ноль одновременно.

Фактически, *электрические* собственные функции из (18) и (19) могут служить базисом для пространственного разложения вектор-потенциала электромагнитного поля $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ в калибровке Кулона, по которому электрическое и магнитное поле рассчитываются стандартно $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (в резонаторе нет свободных зарядов). Во второй части данного исследования вектор-势能 и будет раскладываться по функциям $\mathcal{A}_{npq}^\lambda(\mathbf{r}) \equiv \mathcal{E}_{npq}^\lambda(\mathbf{r})$, где индекс поляризации $\lambda \in \{\text{TM, TE}\}$.

1.4.1. Одномодовый режим

Будем поддерживать в резонаторе-параллелепипеде одну моду накачки частоты ω_{npq} . Деление собственных колебаний на ТЕ- и ТМ-моды в параллелепипеде условно: одно и то же колебание может классифицироваться, как ТМ-мода относительно оси Oz , и как ТЕ-мода относительно другой оси. Поэтому выберем моду ТМ _{npq} , не ограничивая общности:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{pump}}(t, \mathbf{r}) = B_0 \operatorname{Re}\{\mathcal{E}_{npq}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{npq} t}\}, \\ \mathbf{B}^{\text{pump}}(t, \mathbf{r}) = B_0 \operatorname{Re}\{i\mathcal{M}_{npq}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{npq} t}\}. \end{cases} \quad (20)$$

При модах накачки (20) инварианты $\mathcal{F} \neq 0$, $\mathcal{G} = 0$ аналогично одномодовому возбуждению резонатора-отрезка. Вновь рассчитаем по формулам (4) и (7) неоднородности сигнальных уравнений.

В отличие от одномерного резонатора, в параллелепипеде кубичная нелинейность диктует независимые законы смешивания как для самих частот, так и для отдельных компонент волновых векторов. В результате одна мода накачки ω_{npq} устанавливает круг поиска сигнальных мод со следующими частотами и волновыми векторами:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{sig}} &\in \{\omega_{npq}, 3\omega_{npq} = \omega_{3n,3p,3q}\} \\ \mathbf{k}_{\text{sig}} &\in \{\mathbf{k}_{npq}, \mathbf{k}_{3n,pq} \mathbf{k}_{n,3p,q}, \mathbf{k}_{np,3q}, \mathbf{k}_{3n,3p,q}, \mathbf{k}_{3n,p,3q}, \mathbf{k}_{n,3p,3q}, \mathbf{k}_{3n,3p,3q}\}\end{aligned}\quad (21)$$

Очевидно, что на спектр попадают обе смешанные частоты ω_{sig} , и условие I критерия резонанса выполнено для них обеих. Условие II критерия резонанса требует вычислить проекции функций $\mathbf{F}^{\text{el}}, \mathbf{F}^{\text{mg}}$ на моды (n, p, q) и $(3n, 3p, 3q)$. Проецирование на *промежуточные* моды из списка (21), у которых есть и утроенные, и исходные индексы, не требуется, так как частоты со смешанными индексами всё равно отсутствуют среди двух возможных ω_{sig} . Расчёт необходимых проекций представлен в таблице 3:

TM-моды:	n, p, q	$3n, 3p, 3q$
$\mathbf{F}^{\text{el}}, \mathbf{F}^{\text{mg}}$	$\omega_{npq}, 3\omega_{npq}$	ω_{npq}
TE-моды:	n, p, q	$3n, 3p, 3q$
$\mathbf{F}^{\text{el}}, \mathbf{F}^{\text{mg}}$	$\omega_{npq}, 3\omega_{npq}$	ω_{npq}

Таблица 3 — Проверка критерия резонанса для трёхмерного резонатора в одномодовом режиме.

По спектральному составу проекций, отражённому в таблице 3, заключаем, что резонансно усиливается только основная частота ω_{npq} , генерации высших гармоник по-прежнему нет. Стоит отметить, что проекции на некоторые промежуточные моды, чьи частоты лежат между основной ω_{npq} и устроенной $\omega_{3n,3p,3q}$, оказываются также ненулевыми, что даёт надежду найти резонирующую сигнальную частоту в двухмодовом режиме возбуждения параллелепипеда.

1.4.2. Двухмодовый режим

Перейдём к изучению двухмодового возбуждения резонатора-параллелепипеда. Для этого зафиксируем две моды накачки, одну TM- и одну TE-моду для определённости. Выбранная система собственных функций позволяет удобно

записать выражения для электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\text{pump}}(t, \mathbf{r}) &= B_0 \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{E}_{n_1 p_1 q_1}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_1 t} + \mathcal{E}_{n_2 p_2 q_2}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_2 t} \right\}, \\ \mathbf{B}^{\text{pump}}(t, \mathbf{r}) &= B_0 \operatorname{Re} \left\{ i \mathcal{M}_{n_1 p_1 q_1}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_1 t} + i \mathcal{M}_{n_2 p_2 q_2}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_2 t} \right\},\end{aligned}\quad (22)$$

где введены краткие обозначения для частот мод накачки: $\omega_1 := \omega_{n_1 p_1 q_1}$, а также $\omega_2 := \omega_{n_2 p_2 q_2}$. Согласно алгоритму поиска резонирующих сигнальных мод, подставим моды накачки (22) в формулы (7) для расчёта правых частей сигнальных уравнений.

Кубичное смешивание двух основных частот приводит к большему разнообразию сигнальных частот, чем в одномодовом режиме, и снова к независимому смешиванию отдельных компонент сигнальных волновых векторов. После кубического смешивания величины ω_{sig} , $k_{\text{sig},x}$, $k_{\text{sig},y}$, $k_{\text{sig},z}$ могут принимать значения, не более чем из следующих множеств:

$$\omega_{\text{sig}} \in \{ \omega_1, \omega_2, 2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1, 3\omega_1, 3\omega_2 \}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}k_{\text{sig},x} &\in \{ k_{1x}, k_{2x}, 2k_{1x} \pm k_{2x}, 2k_{2x} \pm k_{1x}, 3k_{1x}, 3k_{2x} \}, \\ k_{\text{sig},y} &\in \{ k_{1y}, k_{2y}, 2k_{1y} \pm k_{2y}, 2k_{2y} \pm k_{1y}, 3k_{1y}, 3k_{2y} \}, \\ k_{\text{sig},z} &\in \{ k_{1z}, k_{2z}, 2k_{1z} \pm k_{2z}, 2k_{2z} \pm k_{1z}, 3k_{1z}, 3k_{2z} \}.\end{aligned}\quad (24)$$

Список (23) определяет, какие частоты должны быть проверены по критерию резонанса. Условие I критерия резонанса априори выполнено для частот $\omega_1, \omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2$, а *комбинационные* частоты $2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1$ уже не всегда попадают на спектр резонатора. Комбинационные частоты со знаком «–» могут попасть на спектр либо при условии $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$, либо при точной настройке геометрии параллелепипеда (такой пример разбирается в разделе 1.4.3.).

Для анализа комбинационных частот со знаком «+» полезно применить неравенство треугольника:

$$|\mathbf{k}_{\text{sig}}| = \omega_{\text{sig}} = 2\omega_1 + \omega_2 = 2|\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}_2| \geqslant |\mathbf{2k}_1 + \mathbf{k}_2| = \sqrt{\sum_{i=x,y,z} (2k_{1,i} + k_{2,i})^2} \quad (25)$$

Неравенство (25) свидетельствует, что для попадания частоты $2\omega_1 + \omega_2$ на спектр либо должно выполняться $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$, либо должна найтись компонента под номером i такая, что $k_{\text{sig},i} > 2k_{1,i} + k_{2,i}$. Согласно списку (24), это возможно, только если $k_{\text{sig},i} = 3 \max(k_{1,i}, k_{2,i})$. Отсюда следует вывод (назовём его *леммой*), что в случае $\mathbf{k}_1 \not\parallel \mathbf{k}_2$ критерий резонанса для комбинационной частоты со знаком «+» может выполниться только тогда, когда она входит в состав временного спектра проекции на моду с хотя бы одним устроенным индексом.

Убедившись, что у каждой из сигнальных частот списка (23) есть шанс попасть на спектр, проверим для них условие II критерия резонанса. Однако, нам придётся сначала сократить алгоритм поиска резонанса, так как в случае двух произвольных мод $\text{TM}_{n_1 p_1 q_1}$ и $\text{TE}_{n_2 p_2 q_2}$ проецирование неоднородностей \mathbf{F}^{el} ,

F^{mg} на всевозможные моды, скомбинированные по списку (24), оказывается че-ресчур ресурсозатратен в современных системах компьютерной алгебры.

В усечённой версии метода поиска резонирующих гармоник будем решать не всю систему векторных сигнальных уравнений (6), а только два скалярных уравнения на третий компоненты сигнальных полей E_z^{sig} и B_z^{sig} . Это возможно благодаря линейности уравнений (6), а также конкретному виду (18), (19) собственных функций параллелепипеда, позволяющему в некоторых случаях судить о поведении компонент x, y по эволюции компоненты z . Например, если в результате проверки критерия резонанса окажется, что компонента E_z^{sig} определённой сигнальной ТМ-моды не усиливается, это будет свидетельствовать о том, что и компоненты $E_x^{\text{sig}}, E_y^{\text{sig}}$ этой ТМ-моды не растут по амплитуде (в противном случае росла бы и E_z^{sig} , так как амплитуды отдельных компонент жёстко связаны внутри формулы (18)).

В остальном усечённый алгоритм полностью повторяет исходную схему разделения переменных: поля $E_z^{\text{sig}}(\mathbf{r})$ и $B_z^{\text{sig}}(\mathbf{r})$ раскладываются по собственным функциям $\mathcal{E}_z^\lambda(\mathbf{r})$ и $\mathcal{M}_z^\lambda(\mathbf{r})$ соответственно; затем выводятся обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка на временные коэффициенты разложения; критерий резонанса формулируется без изменений. Техническим отличием является то, что вычисление проекций теперь существенно менее трудоёмко:

$$F_m(t) = \frac{(F_z^{\text{el}}, \mathcal{E}_z^\lambda)}{\|\mathcal{E}_z^\lambda\|^2} = \frac{1}{\|\mathcal{E}_z^\lambda\|^2} \int_D F_z^{\text{el}}(t, \mathbf{r}) \mathcal{E}_z^\lambda(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r},$$

так как не требует интегрирования компонент $F_{x,y}^{\text{el}}$, и вдобавок компонента F_z^{el} оказывается компактнее, чем $F_{x,y}^{\text{el}}$.

Традиционно, отразим спектральный состав вычисленных проекций в таблице 4:

Моды:	n_1	$3n_1$	n_1	n_1	n_1	$3n_1$	$3n_1$	$3n_1$
	p_1	p_1	$3p_1$	p_1	$3p_1$	p_1	$3p_1$	$3p_1$
	q_1	q_1	$3q_1$	$3q_1$	$3q_1$	$3q_1$	q_1	$3q_1$
F_z^{el} на ТМ	$\omega_1, 3\omega_1, 2\omega_2 + \omega_1, 2\omega_2 - \omega_1$				$\omega_1, 3\omega_1$			
	$\omega_1, 3\omega_1$		ω_1		ω_1		—	—

(продолжение таблицы на следующей странице)

Знаки « \pm » в таблице 4 не коррелированы друг с другом и используются для объединения схожих колонок с целью экономии места. Для краткости опущена также зеркально симметричная таблица, получаемая взаимной заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$ повсюду.

Моды:	$2n_2 \pm n_1$ p_1 q_1	n_1 $2p_2 \pm p_1$ q_1	n_1 p_1 $2q_2 \pm q_1$	$2n_2 \pm n_1$ $2p_2 \pm p_1$ q_1	$2n_2 \pm n_1$ p_1 $2q_2 \pm q_1$	n_1 $2p_2 \pm p_1$ $2q_2 \pm q_1$	$2n_2 \pm n_1$ $2p_2 \pm p_1$ $2q_2 \pm q_1$
F_z^{el} на ТМ							$\omega_1, \frac{2\omega_2 + \omega_1}{2}, \frac{2\omega_2 - \omega_1}{2}$
F_z^{mg} на ТЕ							

Таблица 4 — Проверка критерия резонанса для трёхмерного резонатора в двухмодовом режиме.

Содержимое таблицы 4 надо трактовать, как «ограничение сверху» на возможные спектры проекций, возникающих при модах накачки общего вида. В важном частном случае $k_1 \parallel k_2$ амплитуды перед гармониками с подчёркнутыми комбинационными частотами обращаются в ноль, запрещая тем самым долгожданный резонанс. В оставшемся случае $k_1 \not\parallel k_2$ следует вспомнить лемму, сформулированную несколькими абзацами выше. Согласно лемме, гармоника с комбинационной частотой $2\omega_2 + \omega_1$ имеет шанс резонировать, только если она сохраняется в спектре проекции на моду с хотя бы одним утроенным индексом. Однако таблица 4 показывает, что комбинационная частота $2\omega_2 + \omega_1$ полностью отсутствует в спектрах проекций на моды, имеющие утроенные индексы. Это доказывает отсутствие резонанса на частоте $2\omega_2 + \omega_1$ (и аналогично $2\omega_1 + \omega_2$). После этого остаётся единственный шанс генерации новой частоты: в случае $k_1 \not\parallel k_2$ надо подобрать такие длины сторон параллелепипеда, чтобы подчёркнутая частота $2\omega_2 - \omega_1$ попала на спектр и не исчезла из последней части таблицы 4. Возможности генерации сигнальной гармоники с частотой $2\omega_2 - \omega_1$ посвящается раздел 1.4.3.

В полной аналогии с двухмодовым возбуждением одномерного резонатора, безусловный резонанс имеет место только для основных частот ω_1, ω_2 . Гармоники с чисто утроенными частотами $3\omega_1, 3\omega_2$ остаются подавлены независимо от настройки резонатора.

1.4.3. Частный случай

До сих пор исследовались моды накачки достаточно общего вида, чтобы показать, что генерация высших гармоник неосуществима в широком классе конфигураций возбуждения резонаторов. Теперь рассмотрим частный случай мод накачки, конструктивно доказывающий теоретическую возможность резонансного усиления комбинационной частоты $2\omega_{011} - \omega_{110}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{pump}}(t, \mathbf{r}) &= B_0 \operatorname{Re}\left\{ \mathcal{E}_{110}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{110}t} + \mathcal{E}_{011}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{011}t} \right\}, \\ \mathbf{B}^{\text{pump}}(t, \mathbf{r}) &= B_0 \operatorname{Re}\left\{ i\mathcal{M}_{110}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{110}t} + i\mathcal{M}_{011}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{011}t} \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Действуя по не усечённому исходному алгоритму раздела 1.2., рассчитаем на модах накачки (26) неоднородности сигнальных уравнений по формулам (7). И снова в силу кубичного характера нелинейности, стоит ожидать появление только частот вида (23), где $\omega_1 = \omega_{011}$ и $\omega_2 = \omega_{110}$.

Вычислим проекции неоднородностей $\mathbf{F}^{el}, \mathbf{F}^{mg}$ на все моды, чьи волновые векторы можно составить из компонент вида (24), и занесём спектры ненулевых проекций в таблицу 5:

TM:	110	130	310	330	112	132	211	231
\mathbf{F}^{el}	$\omega_{110}, 3\omega_{110}, 2\omega_{011} \pm \omega_{110}$		$\omega_{110}, 3\omega_{110}$	ω_{110}	$\omega_{110}, 2\omega_{011} \pm \omega_{110}$		$\omega_{011}, 2\omega_{110} \pm \omega_{011}$	
TE:	011	031	013	033	112	132	211	231
\mathbf{F}^{el}	$\omega_{011}, 3\omega_{011}, 2\omega_{110} \pm \omega_{011}$		$\omega_{011}, 3\omega_{011}$	ω_{011}	$\omega_{110}, 2\omega_{011} \pm \omega_{110}$		$\omega_{011}, 2\omega_{110} \pm \omega_{011}$	
\mathbf{F}^{mg}								

Таблица 5 — Проверка критерия резонанса для трёхмерного резонатора в двухмодовом режиме возбуждения TM011+TE110.

Как обычно, безусловно резонируют только основные частоты ω_{110} и ω_{011} . В согласии с предыдущим разделом, усиление гармоники с частотой $2\omega_{011} + \omega_{110}$ не достигается, так как для неё не выполнено условие I критерия резонанса: $2\omega_{011} + \omega_{110} \neq \omega_{130}, \omega_{132}, \omega_{231}$. Однако оказывается, что условие попадания сигнальной частоты $\omega_{sig} = 2\omega_{011} - \omega_{110}$ на спектр можно удовлетворить точной настройкой геометрии резонатора:

$$2\omega_{011} - \omega_{110} = \omega_{130} \quad \Leftarrow \quad L_x = L_y = \frac{L_z}{r}, \quad r = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}} \simeq 0.49 \quad (27)$$

В конфигурации (27) сигнальная частота ω_{sig} попадает на спектр, причём на частоту именно той TM130-моды, в спектре проекции на которую она сохраняется согласно таблице 5. Таким образом, выполнены оба условия критерия резонанса, и возможность генерации высшей гармоники ($\omega_{130} > \omega_{110}, \omega_{011}$) доказана конструктивно.

Метод разделения переменных позволяет легко восстановить явный вид сгенерированной сигнальной моды:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{sig}(t, \mathbf{r}) = B_0^{sig} \operatorname{Re} \left\{ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{130}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) e^{i(\omega_{130}t + \pi)} \right\}, \\ \mathbf{B}^{sig}(t, \mathbf{r}) = B_0^{sig} \operatorname{Re} \left\{ i \boldsymbol{\mathcal{M}}_{130}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) e^{i(\omega_{130}t + \pi)} \right\}, \end{cases} \quad B_0^{sig} = G_0 \frac{\pi^2 \kappa B_0^3 Q}{(\omega_{130} L_z)^2}, \quad (28)$$

где амплитуда B_0^{sig} сигнального поля включает в себя коэффициент:

$$G_0(r, \beta) = \frac{4\left(4 + r\sqrt{2(1+r^2)} + r^2\right) - 4\beta r\left(\sqrt{2(1+r^2)^3} + (3+r^2)r\right)}{1+r^2}. \quad (29)$$

Кубичный характер самодействия электромагнитного поля отражается в пропорциональности сигнальной амплитуды третьей степени амплитуды мод на-качки $B_0^{\text{sig}} \propto \kappa B_0^3$. Метод резонансного усиления увеличивает сигнальную амплитуду в количестве раз, численно равное добротности резонатора $B_0^{\text{sig}} \propto Q$. Наконец, геометрический коэффициент G_0 полностью задаётся длинами сторон резонатора (параметр r), а также соотношением β между инвариантами электромагнитного поля в составе лагранжиана Эйлера-Гейзенберга.

Для сравнения полученного классического результата с квантовым описанием (часть 2.), оценим среднее равновесное число квантов электромагнитного поля в сигнальной mode (28). Это можно сделать, интегрируя по объёму резонатора отношение плотности электромагнитной энергии к энергии одного такого кванта:

$$N_{\text{sig}}^{\text{class}} := \int_D \frac{\mathbf{E}_{\text{sig}}^2(t, \mathbf{r}) + \mathbf{B}_{\text{sig}}^2(t, \mathbf{r})}{2\hbar\omega_{130}} d\mathbf{r} = \frac{(B_0^{\text{sig}})^2 V}{2\omega_{130}} = \frac{G_0^2 \kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4}{2\pi 10^{\frac{5}{2}} r^7}. \quad (30)$$

Для получения численного результата, подставим в формулу (30) следующие характерные значения параметров конфигурации резонатора и константы κ, β из теории Эйлера-Гейзенберга:

$Q = 10^{10}$ $B_0 = 0.1 \text{ Тл} \simeq 6.93 \cdot 10^{-17} \text{ ГэВ}^2$ $L_z = 20 \text{ см} \simeq 1.01 \cdot 10^{15} \text{ ГэВ}^{-1}$ <hr/> $\kappa = \frac{a_e^2}{90m_e^4} \simeq 8.68 \cdot 10^6 \text{ ГэВ}^{-4}$ $\beta = \frac{7}{4}$ $r = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}} \simeq 0.486$	\Rightarrow	$N_{\text{sig}}^{\text{class}} \simeq 55 \text{ фотонов}$ $\omega_{130} \simeq 2.4 \text{ ГГц}$ $B_0^{\text{sig}} \simeq 1.1 \cdot 10^{-16} \text{ Тл}$ $(E_0^{\text{sig}} \simeq 3.4 \cdot 10^{-8} \text{ В/м})$ $\frac{G_0^2}{2\pi 10^{\frac{5}{2}} r^7} \simeq 3.333$
---	---------------	--

1.5. Подытог

В классической части исследования из эффективного лагранжиана Эйлера-Гейзенберга были выведены нелинейные поправки к уравнениям Maxwella и волновым уравнениям электромагнитного поля. Для анализа скорректированных волновых уравнений в резонаторе с идеально проводящими стенками был развит общий подход к поиску резонансных решений, основанный на методе разделения переменных (методе Фурье) в рамках первого порядка теории возмущений по константе связи. Сформулированный критерий резонанса приме-

нялся к двум моделям резонаторов, возбуждаемых в одно- и двухмодовом режимах.

Обсудим полученные результаты с позиции эксперимента. Целью возможного опыта является детектирование самодействия электромагнитного поля и измерение его величины. Для этого резонатор возбуждается модами накачки высокой интенсивности, которые благодаря нелинейному самодействию рождают сигнальные моды. Сигнальные моды суть искомое отклонение эволюции электромагнитного поля от классической электродинамики Максвелла. Так как эффект чрезвычайно слаб в лабораторных условиях, для регистрации сигнальные моды необходимо усиливать резонансно. Однако, детектирование даже резонансно усиленного искажения амплитуды $B_0^{\text{sig}} \sim 10^{-16}$ Тл на фоне поля накачки с амплитудой $B_0 \sim 0.1$ Тл не представляется возможным напрямую. Поэтому практический интерес имеет генерация *высших гармоник*, чья частота ω_{sig} будет как можно дальше отстоять от основных частот возбуждения. Тогда появится возможность настроить узкую полосу пропускания детектора на цевлевую сигнальную частоту, эффективно фильтруя её на фоне мод накачки.

Как было показано в классической части работы, генерация высших гармоник не осуществима в одно- и двухмодовом режимах возбуждения одномерного резонатора, а также с помощью монохроматического возбуждения резонатора-параллелепипеда. При двухмодовом возбуждении трёхмерного резонатора высшие гармоники так же почти все подавлены, за исключением комбинационной частоты $\omega_{130} = 2\omega_{011} - \omega_{110}$. При точной настройке резонатора для неё открывается возможность резонансной генерации, причём данная мода по частоте превышает основные частоты возбуждения в полтора – два раза:

$$\frac{\omega_{130}}{\omega_{110}} \simeq 2.2, \quad \frac{\omega_{130}}{\omega_{011}} \simeq 1.4 \quad (\text{при } r^2 = \sqrt{5} - 2).$$

Получается, что классическое описание делает континтуитивное предсказание: несмотря на кубичный характер нелинейности, генерация самой полезной высшей гармоники с утроенной частотой не происходит ни в одной из рассмотренных конфигураций! Помимо этого неожиданного утверждения, предсказанная генерация комбинационной частоты со знаком «–» встречает трудности при попытке её интерпретации с квантовой точки зрения. На уровне одиночных фотонов процесс типа $3 \rightarrow 1$, а именно:

$$2\omega_{011} + \omega_{110} \not\rightarrow \omega_{130},$$

запрещён законом сохранения энергии. Тем не менее такая схема генерации предсказывается классическим описанием, причём как чуть ли не единственную реализуемая. Альтернативный разрешённый процесс ($2 \rightarrow 2$, с «перекинутым» в правую часть фотоном):

$$2\omega_{011} \longrightarrow \omega_{130} + \omega_{110}$$

илюстрировал бы схему одномодовой генерации (с одной модой накачки TE011), невозможность которой уже доказана.

Неожиданность предсказания, сделанного в рамках классического подхода, и поднятый вопрос по его квантовой интерпретации побуждают изучить генерацию высших гармоник в формализме квантовой теории поля, чему посвящена вторая часть данного исследования.

2. Квантовое описание

Во второй части работы генерация высших гармоник изучается с позиций квантовой теории поля. Сначала, при «выключенном» самодействии, квантуется свободное электромагнитное поле в резонаторах (раздел 2.1.). Отдельно производится квантование свободного поля в одномерном резонаторе (подраздел 2.1.1.) и в трёхмерном резонаторе (подраздел 2.1.2.), описываются векторы состояний поля (подраздел 2.1.3.). Далее изучается самодействие электромагнитного поля по теории возмущений в формализме S-матрицы (раздел 2.2.). Производится расчёт матричных элементов для квантовых процессов, аналогичных схемам генерации, которые были рассмотрены в классической части исследования. Наконец, в разделе с выводами исследования проводится сравнение полученных ранее классических результатов с квантовыми расчётами и даётся интерпретация последних, которая объясняет отсутствие генерации определённых высших гармоник и рождение комбинационной сигнальной частоты со знаком «—».

2.1. Свободное электромагнитное поле

Для нужд данного исследования требуется квантовая теория электромагнитного поля в резонаторе D , занимающем ограниченную область пространства.

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}(x))^2, \quad t \in \mathbb{R}, \mathbf{r} \in D.$$

Техника квантования свободного поля в объёме конечных размеров во многом аналогична христоматийному квантованию поля во всём пространстве. Однако наличие граничных условий всё же вносит ряд особенностей и заслуживает специального рассмотрения в данной работе.

Проведение эксперимента с электромагнитным полем в резонаторе не предполагает движения с релятивистскими скоростями. В связи с этим нет необходимости всюду соблюдать явную Лоренц-ковариантность выкладок. В частности, это позволяет зафиксировать удобную калибровку Кулона $\nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = 0$, где $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ — вектор-потенциал электромагнитного поля. Условие отсутствия свободных зарядов в резонаторе разрешает положить скалярный потенциал $A_0 = 0$ и работать в дальнейшем только с поперечным вектор-потенциалом.

Задание конечной фиксированной формы резонатора нарушает пространственную трансляционную симметрию, а также ограничивает вращательную симметрию. Следовательно, на смену традиционному разложению потенциала электромагнитного поля в пространственный интеграл Фурье приходит разложение по собственным функциям области резонатора в заданных граничных условиях. Временная трансляционная симметрия сохраняется, поэтому зависимость потенциала от времени будем по-прежнему представлять в виде временного интеграла Фурье.

2.1.1. Резонатор-отрезок

О我们将 операторное квантование свободного электромагнитного поля в резонаторе-отрезке $D = (0, L_x)$, ограниченном двумя непроницаемыми для поля пластины (см. рис 3). Размеры пластин считаем сколь угодно большими по сравнению с длиной отрезка $L_y, L_z \gg L_x$, что даёт эффективно бесконечную площадь пластин $S \gg L_x^2$ и объём резонатора $V = L_x L_y L_z = L_x S$.

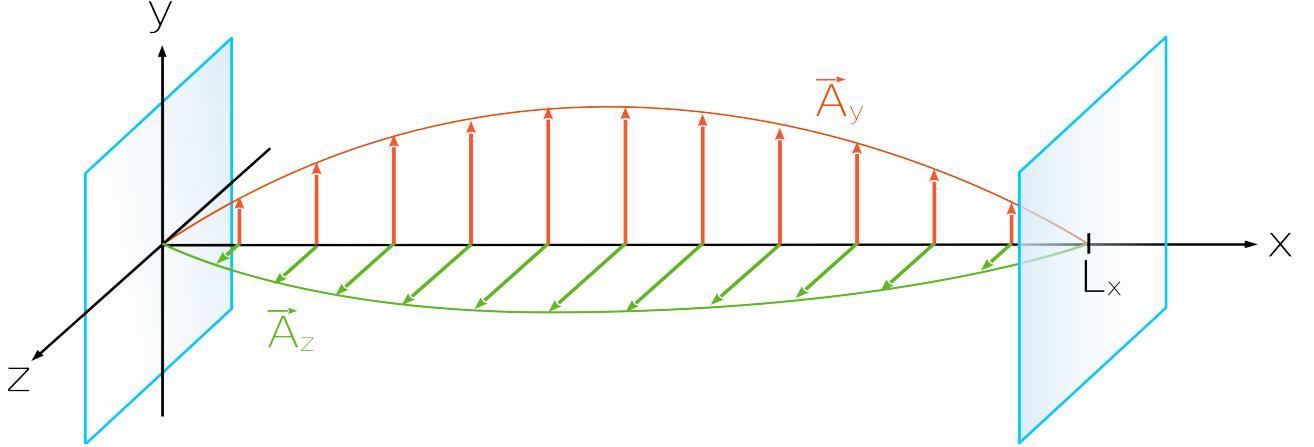


Рисунок 3 — Одномерный резонатор с идеально проводящими стенками.

Определим, какие возникают ограничения на компоненты вектор-потенциала $\mathbf{A}(t, x)$, зависящего в одномерной модели только от одной пространственной координаты и времени. Во-первых, нетрудно убедиться, что из калибровочного условия поперечности и из отсутствия свободных зарядов следует ортогональность вектор-потенциала к оси резонатора:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_x \partial_t A_x(t, x) + \partial_y \partial_t A_y(t, x) + \partial_z \partial_t A_z(t, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \partial_x A_x(t, x) = 0, \\ \partial_t \partial_x A_x(t, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x(t, x) = c_0 + c_1 t + c_2 x \quad \Rightarrow \quad E_x(t, x) = c_1.$$

В изолированном электрически нейтральном резонаторе $c_1 = 0$, так как без поверхностной плотности заряда не получится создать пространственно однородное электрическое поле, направленное вдоль оси Ox . Тогда без ограничения общности положим $A_x(t, x) = 0$, потому что слагаемые $c_0 + c_2 x$ не дают вклада в физические характеристики электромагнитного поля (в векторы \mathbf{E}, \mathbf{B}).

Во-вторых, требование идеально проводящих стенок $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ в точках $x = 0, L_x$ подчиняет две оставшиеся компоненты A_y, A_z однородным граничным условиям Дирихле:

$$\text{при } x = 0, L_x : \quad \mathbf{E} \parallel \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \mathbf{A}_\perp = 0 \quad \Leftarrow \quad A_y = 0, A_z = 0.$$

Собственные функции отрезка с однородными граничными условиями уже были использованы ранее (см. раздел 1.3.). Взятие их в качестве базиса для пространственной части потенциала приводит к разложению компонент $A_y(t, x)$,

$A_z(t, x)$ в ряд Фурье по синусам — профилям стоячих волн. При наличии сдвиговой симметрии во времени, потенциал раскладывается и в интеграл Фурье по переменной t :

$$A_i(t, x) = \sqrt{\frac{2}{V}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{A}_i(\omega, k_n) \sin(k_n x) e^{i\omega t}, \quad k_n = \frac{\pi n}{L_x}, \quad i = y, z.$$

Вещественность потенциала электромагнитного поля накладывает условие на Фурье-образ: $(A_i(\omega, k_n))^* = A_i(-\omega, k_n)$.

Подстановка данного разложения в свободные уравнения движения поля $\square A_i = 0$ приводит к дисперсионному соотношению $\omega^2 = k_n^2$, которому должно подчиняться произвольное нетривиальное решение полевых уравнений. Обеспечить автоматическое выполнение дисперсионного соотношения удобно с помощью выделения дельта-функции общим множителем в Фурье-образе поля $\tilde{A}_i(\omega, k_n) = A_i(\omega, k_n) \delta(\omega^2 - k_n^2)$.

Далее, воспользуемся фильтрующим свойством дельта-функции сложного аргумента и снимем временной интеграл Фурье в разложении потенциала электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} A_i(t, x) &= \sqrt{\frac{2}{V}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega A_i(\omega, k_n) \sin(k_n x) e^{i\omega t} \delta(\omega^2 - k_n^2) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{V}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_i(+\omega_n, k_n) e^{+i\omega_n t} + A_i(-\omega_n, k_n) e^{-i\omega_n t} \right) \frac{\sin(k_n x)}{2\omega_n} \end{aligned}$$

Согласно процедуре операторного квантования, наделим амплитуды разложения свойствами лестничных операторов обыкновенного гармонического осциллятора.

$$\begin{aligned} a_{i,n}^{\pm} &:= \frac{A_i(\pm\omega_n, k_n)}{\sqrt{2\omega_n}}, \quad (a_{i,n}^{\pm})^* = a_{i,n}^{\mp}, \quad [a_{i,n}^-, a_{j,m}^+] = \delta_{ij}\delta_{nm} \\ \Rightarrow \quad A_i(t, x) &= A_i^+(t, x) + A_i^-(t, x), \quad A_i^{\pm}(t, x) = \sqrt{\frac{2}{V}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,n}^{\pm} \sin(k_n x) \frac{e^{\pm i\omega_n t}}{\sqrt{2\omega_n}} \end{aligned} \tag{31}$$

Каноническая нормировка включает множитель $\sqrt{2\omega_n}$ в квантовые амплитуды, благодаря чему оператор энергии системы будет такой квадратичной формой по $a_{i,n}^{\pm}$, которая позволит интерпретировать $a_{i,n}^{+(-)}$, как операторы рождения (уничтожения) фотона линейной поляризации i с энергией ω_n .

$$H = \iint dy dz \int_0^{L_x} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2} \sum_{i=y,z} (a_{i,n}^+ a_{i,n}^- + a_{i,n}^- a_{i,n}^+)$$

2.1.2. Резонатор-параллелепипед

Операторное квантование свободного электромагнитного поля в резонаторе-параллелепипеде с идеально проводящими стенками осуществляется аналогично предыдущему разделу 2.1.1. Отличны лишь собственные функции области, по которым ведётся разложение пространственной части вектор-потенциала.

Границное условие на вектор-потенциал в идеально проводящем параллелепипеде можно получить из граничного условия на электрическое поле. Последнее не должно иметь тангенциальной составляющей на поверхности идеально проводящих стенок: $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \in \partial D$. Так как в зафиксированной калибровке Кулона при отсутствии свободных зарядов $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$, это граничное условие, не зависящее от времени, в точности перекладывается и на вектор-потенциал: $\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \in \partial D$.

Следовательно, система собственных функций для вектор-потенциала в идеально проводящем параллелепипеде имеет тот же вид $\mathcal{A}_{npq}^\lambda(\mathbf{r}) \equiv \mathcal{E}_{npq}^\lambda(\mathbf{r})$ с индексом поляризации $\lambda \in \{\text{TM, TE}\}$, что и система СФ для электрического поля, использованная в разделе 1.4. Для операторного квантования удобно, чтобы собственные функции, по которым будет раскладываться вектор-потенциал, были нормированы на единицу, о чём мы уже позаботились ранее.

Используя обозначенные собственные функции, выполним разложение вектор-потенциала в ряд Фурье по пространственной переменной и в интеграл Фурье по времени. Аналогично квантованию на отрезке запишем произвольное решение с помощью дельта-функции, чьим аргументом является дисперсионное соотношение, диктуемое свободными полевыми уравнениями. Далее снимем дельта-функцией временной интеграл Фурье и выделим амплитуды в канонической нормировке. Тогда поле будет представлено в следующем виде:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A}^+(t, \mathbf{r}) + \mathbf{A}^-(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{A}^\pm(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda, npq} a_{npq}^{\lambda\pm} \mathcal{A}_{npq}^\lambda(\mathbf{r}) \frac{e^{\pm i\omega_{npq} t}}{\sqrt{2\omega_{npq}}}, \quad (32)$$

$$(a_{npq}^{\lambda\pm})^* = a_{npq}^{\lambda\mp}, \quad \left[a_{npq}^{\lambda-}, a_{n'p'q'}^{\lambda'+} \right] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta_{pp'} \delta_{qq'}$$

Для компактности здесь введена запись $\sum_{\lambda, npq}$, которую следует понимать, как суммирование по обеим поляризациям $\lambda \in \{\text{TM, TE}\}$ и по всем доступным наборам индексов prq в случае каждой поляризации (разрешённые наборы индексов несколько отличаются у ТМ- и ТЕ-подсистем собственных функций). Энергия поля, благодаря ортонормированности базисных функций $\mathcal{A}_{npq}^\lambda$ и канонической нормировке $\sqrt{2\omega_{npq}}$, $a_{npq}^{\pm\lambda}$, складывается из энергий каждой моды:

$$H = \sum_{\lambda, npq} \frac{\omega_{npq}}{2} (a_{npq}^{\lambda+} a_{npq}^{\lambda-} + a_{npq}^{\lambda-} a_{npq}^{\lambda+}).$$

2.1.3. Состояния свободного поля

В предыдущих разделах 2.1.1. и 2.1.2. было проведено операторное квантование свободного электромагнитного поля, в ходе которого были определены лестничные полевые операторы. Данные операторы действуют в гильбертовом пространстве векторов состояний поля, в качестве базиса которого можно выбрать базис чисел заполнения:

$$\begin{aligned} \exists |0\rangle : a_n^{\lambda-}|0\rangle = 0 \quad \forall \lambda, n. \quad & \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0 : |\nu_n^\lambda\rangle := \frac{(a_n^{\lambda+})^\nu}{\sqrt{\nu!}}|0\rangle \\ \Rightarrow \quad \langle \nu_n^\lambda | \nu_{n'}^{\lambda'} \rangle = \delta_{\nu\nu'}, \quad a_n^{\lambda+} |\nu_n^\lambda\rangle = \sqrt{\nu+1} |\nu_{n+1}^\lambda\rangle, \quad a_n^{\lambda-} |\nu_n^\lambda\rangle = \sqrt{\nu} |\nu_{n-1}^\lambda\rangle. \end{aligned}$$

При конструировании чистого состояния в виде прямого произведения базисных векторов $|\text{pure}\rangle = \bigoplus_{\lambda,n} |\nu_n^\lambda\rangle$ необходимо учитывать условие Фока, делающее базис счётным $\sum_{\lambda,n} \nu_n^\lambda < \infty$.

Любое чистое состояние по своим свойствам далеко от классического поля. Например, в чистом состоянии среднее значение поля равно нулю в любой точке в любой момент времени: $\langle \text{pure} | \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) | \text{pure} \rangle = 0$. Более близким квантовым аналогом классического поля служит смешанное когерентное состояние, характеризующееся параметром ξ :

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{C} : |\xi_n^\lambda\rangle := e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} e^{\xi a_n^{\lambda+}} |0\rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\xi^\nu}{\sqrt{\nu!}} |\nu_n^\lambda\rangle \\ \Rightarrow \quad \langle \xi_n^\lambda | \xi_n^\lambda \rangle = 1, \quad a_n^{\lambda-} |\xi_n^\lambda\rangle = \xi |\xi_n^\lambda\rangle, \quad \langle \xi_n^\lambda | a_n^{\lambda+} a_n^{\lambda-} | \xi_n^\lambda \rangle = |\xi|^2. \end{aligned}$$

Из последнего свойства становится очевиден смысл величины $|\xi|^2$, равной среднему числу фотонов в когерентном состоянии.

2.2. Самодействующее электромагнитное поле

Имея под рукой проквантованное свободное электромагнитное поле в резонаторе D , перейдём к учёту эффективного самодействия поля по теории возмущений. Добавим вклад Эйлера-Гейзенберга в лагранжиан (обобщая коэффициент $\frac{7}{4} \rightarrow \beta$):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + : \mathcal{L}_{\text{EH}} : , \quad \mathcal{L}_{\text{EH}} = \kappa (\mathcal{F}^2 + \beta \mathcal{G}^2).$$

При этом мы используем нормальное упорядочивание лагранжиана самодействия, чтобы при вычислении матричных элементов не сталкиваться с расходимостями типа «пузырь».

Согласно теории возмущений, удельная вероятность w_{fi} перехода между двумя *свободными* состояниями $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ в единице фазового объёма в единицу времени даётся квадратом модуля матричного элемента S_{fi} матрицы S :

$$w_{fi} = |S_{fi}|^2 d\Phi, \quad S_{fi} = \langle f | S | i \rangle.$$

В наших расчётах векторы начального и конечного состояний будут ортогональны $\langle f|i \rangle = 0$. Сама S -матрица представима в виде хронологической экспоненты от действия:

$$S = T \exp \left(i \int : \mathcal{L}_{EH} : d^4x \right) = 1 + i \int T(:\mathcal{L}_{EH}(x):) d^4x + \dots = 1 + T,$$

$$\langle f|S|i \rangle = \langle f|i \rangle^0 + \langle f|T|i \rangle = T_{fi} = i \int \langle f|:\mathcal{L}_{EH}(x):|i \rangle d^4x + \mathcal{O}(\kappa^2).$$

Как уже упоминалось, эффект самодействия крайне мал в лабораторных условиях ($\kappa B^2 < 10^{-24}$), поэтому теория возмущений применима, и достаточно ограничиться её первым порядком. Вычисления в первом порядке автоматически не содержат расходимостей, что удобно.

Определённая тонкость заключается в том, что в стандартной формулировке теория возмущений обосновывается для начальных и конечных состояний, в которых частицы разнесены на пространственную бесконечность. Бесконечное удаление волновых пакетов друг от друга оправдывает использование свободных векторов состояний. Однако в нашем случае поле всегда сосредоточено в резонаторе конечных размеров, и может показаться, что не вполне корректно в какой-то момент самодействие «выключать». На помощь приходит тот факт, что собственные функции изучаемых резонаторов (отрезка и параллелепипеда) являются стоячими гармоническими волнами и раскладываются в сумму плоских волн. Можно разложить начальный и конечный векторы в линейную комбинацию состояний, отвечающих плоским волнам $|i\rangle, |f\rangle = \sum_{j=1}^{2^d} |\pm k_j\rangle$, где d — размерность пространства, и вычислять матричный элемент между векторами плоских волн, так как для работы с последними теория возмущений строго обоснована. Результат вычисления что со стоячими волнами, что с соответствующей комбинацией плоских волн будет одинаков, потому что векторы состояний входят в матричный элемент линейно (в виде «обкладок»).

Приступим к вычислению элемента T_{fi} . Сначала перейдём к трёхмерным обозначениям, свободно меняя порядок бозонных полей внутри нормально упорядоченного лагранжиана самодействия.

$$\mathcal{F} = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2), \quad \mathcal{G} = F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -4BE,$$

$$\mathcal{L}_{EH} = \kappa(\mathcal{F}^2 + \beta\mathcal{G}^2) = 4\kappa(E^4 - 2B^2E^2 + B^4 + 4\beta(BE)^2).$$

Значит, матричный элемент будет иметь следующую структуру:

$$T_{fi} = 4i\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_D dr \langle f| :E^4 - 2B^2E^2 + B^4 + 4\beta(BE)^2: |i \rangle. \quad (33)$$

Следующим этапом является расчёт нормальных спариваний лестничных операторов с полями B, E , выбор конкретных состояний $|i\rangle, |f\rangle$ и интегрирование результата спариваний по резонатору, чем мы и займёмся в следующих разделах.

2.2.1. Процесс 3 в 1

В надежде выяснить причину отсутствия третьей гармоники, начнём с наиболее простого и показательного примера — одномодового возбуждения резонатора-отрезка.

В классической части работы выбиралась мода накачки с индексом n и проводился поиск сигнальной моды с индексом $3n$, см. раздел 1.3.1. На квантовом уровне законом сохранения энергии разрешён процесс с одиночными фотонами $3\omega_n \rightarrow \omega_{3n}$. Среди трёх линейно поляризованных фотонов в начальном состоянии в общем случае присутствуют две поляризации $i, j \in \{y, z\}$, выходной фотон также имеет некоторую поляризацию $l \in \{y, z\}$. Поэтому выберем следующие начальный и конечный векторы состояний:

$$|i\rangle = |2_n^i\rangle \otimes |1_n^j\rangle = (a_{i,n}^+)^2 a_{j,n}^+ |0\rangle, \quad |f\rangle = |1_{3n}^l\rangle = a_{l,3n}^+ |0\rangle,$$

где операторы рождения $a_{i,n}^\pm$ были введены при квантовании свободного поля на отрезке в разделе 2.1.1.

Для вычисления по формуле (33) требуется знание нормальных спариваний лестничных операторов $a_{i,n}^\pm$ с компонентами электрического и магнитного полей $E_i, B_i, i \in \{y, z\}$. Рассчитаем их, используя операторное разложение (31) вектор-потенциала на отрезке и спаривание самих лестничных операторов:

$$\begin{aligned} \underbrace{a_{i,n}^-}_{\text{[}} a_{j,m}^+ &= [a_{i,n}^-, a_{j,m}^+] = \delta_{ij} \delta_{nm} \\ \underbrace{a_{i,n}^-}_{\text{[}} E_j(t, x) &= \underbrace{a_{i,n}^-}_{\text{[}} \partial_0 A_j(t, x) = \sqrt{\frac{2}{V}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_m x)}{\sqrt{2\omega_m}} \left(a_{i,n}^- a_{j,m}^+ (+i\omega_m) e^{+i\omega_m t} + a_{i,n}^- a_{j,m}^- (-i\omega_m) e^{-i\omega_m t} \right) \\ \underbrace{a_{i,n}^-}_{\text{[}} E_j(t, x) &= \delta_{ij} i \sqrt{\frac{\omega_n}{V}} \sin(k_n x) e^{i\omega_n t} = \left(\underbrace{E_j(t, x)}_{\text{[}} a_{i,n}^+ \right)^* \\ \underbrace{a_{z,n}^-}_{\text{[}} B_y(t, x) &= -\underbrace{a_{z,n}^-}_{\text{[}} \partial_x A_z(t, x) = -\sqrt{\frac{\omega_n}{V}} \cos(k_n x) e^{i\omega_n t} = -\underbrace{a_{y,n}^-}_{\text{[}} B_z(t, x) \end{aligned}$$

Приступим к вычислению (33), разбивая его на этапы по количеству слагаемых в подынтегральном выражении.

$$\begin{aligned} T_{\text{fi}} &= 4i\kappa S \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{L_x} dx \langle 0 | a_{l,3n}^- : \mathbf{E}^4 - 2\mathbf{B}^2\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^4 + 4\beta(\mathbf{B}\mathbf{E})^2 : (a_{i,n}^+)^2 a_{j,n}^+ | 0 \rangle = \\ &= \langle \mathbf{E}^4 \rangle - 2 \langle \mathbf{B}^2\mathbf{E}^2 \rangle + \langle \mathbf{B}^4 \rangle + 4\beta \langle (\mathbf{B}\mathbf{E})^2 \rangle = \quad (34) \\ &= \left\{ \langle E_y^4 \rangle + 2 \langle E_y^2 E_z^2 \rangle + \langle E_z^4 \rangle \right\} - 2 \left\{ \langle B_y^2 E_y^2 \rangle + \langle B_y^2 E_z^2 \rangle + \langle B_z^2 E_y^2 \rangle + \langle B_z^2 E_z^2 \rangle \right\} \\ &\quad + \left\{ \langle B_y^4 \rangle + 2 \langle B_y^2 B_z^2 \rangle + \langle B_z^4 \rangle \right\} + 4\beta \left\{ \langle B_y^2 E_y^2 \rangle + 2 \langle B_y E_y B_z E_z \rangle + \langle B_z^2 E_z^2 \rangle \right\}, \end{aligned}$$

где обозначено усреднение $\langle F \rangle := 4i\kappa S \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{L_x} dx \langle 0 | a_{l,3n}^- : F : (a_{i,n}^+)^2 a_{j,n}^+ | 0 \rangle$.

Как видим, образовалось 13 слагаемых. Найдём явно значение одного из них:

$$\begin{aligned}
\langle E_y^4 \rangle &= 4i\kappa S \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{L_x} dx \langle 0 | a_{l,3n}^- :E_y E_y E_y E_y: a_{i,n}^+ a_{i,n}^+ a_{j,n}^+ | 0 \rangle = \\
&= 4i\kappa S \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{L_x} dx [4!] \left(+i\delta_{ly} \sqrt{\frac{\omega_{3n}}{V}} \sin(k_{3n}x) e^{+i\omega_{3n}t} \right) \times \\
&\quad \times \left(-i\delta_{iy} \sqrt{\frac{\omega_n}{V}} \sin(k_nx) e^{-i\omega_nt} \right)^2 \left(-i\delta_{jy} \sqrt{\frac{\omega_n}{V}} \sin(k_nx) e^{-i\omega_nt} \right) = \\
&= 4i\kappa S 4! \delta_{iy} \delta_{jy} \delta_{ly} i(-i)^3 \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_{3n}\omega_n^3}{V^4}}}_{=2\pi\delta(0)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_{3n}-3\omega_n)t} dt}_{=2\pi\delta(0)} \underbrace{\int_0^{L_x} \sin(k_{3n}x) \sin^3(k_nx) dx}_{=-L_x/8} = \\
&= 2\pi\delta(0) \frac{12\sqrt{3}i\pi^2 n^2 \kappa}{L_x^3 S} \delta_{iy} \delta_{jy} \delta_{ly}
\end{aligned}$$

Данный расчёт показывает, что традиционно возникает δ -функция, выражающая закон сохранения энергии в процессе, а четыре собственные функции после интегрирования по x собираются в геометрический множитель. Отдельно стоит обратить внимание на комбинаторный коэффициент $[4!]$, возникающий в силу неразличимости полей в произведении $:E_y^4:$. При усреднении, например, $\langle B_y^2 E_y^2 \rangle$ комбинаторный множитель составит $2! \cdot 2! = 4$, а член $\langle B_y E_y B_z E_z \rangle$ даст единичный комбинаторный фактор.

Опуская подробное вычисление каждого из 12-ти оставшихся слагаемых, приведём окончательный ответ:

$$T_{fi} = \underbrace{\langle \mathbf{E}^4 \rangle - 2 \langle \mathbf{B}^2 \mathbf{E}^2 \rangle + \langle \mathbf{B}^4 \rangle}_{=0} + \underbrace{4\beta \langle (\mathbf{B}\mathbf{E})^2 \rangle}_{=0} = 0,$$

в котором первые 3 члена в сумме дают ноль, как и последнее слагаемое. Таким образом, равенство нулю матричного элемента (а значит, и отсутствие генерации третьей гармоники) обеспечивается усреднением квадратов инвариантов электромагнитного поля независимо друг от друга. Множитель, связанный с поляризациями начальных и конечного фотонов, оказывается вообще говоря ненулевым.

2.2.2. Процесс 2+1 в 1

С целью объяснить подавление следующей по привлекательности комбинаторной гармоники $2\omega_1 + \omega_2$ в резонаторе-отрезке, опишем на квантовом уровне процесс двухмодового возбуждения данного резонатора. Будем моделировать

конфигурацию мод накачки с индексами n и p , подобно рассмотренной в классическом разделе 1.3.2. В отличие от одномодовой схемы, теперь все участвующие в процессе $2\omega_n + \omega_p \rightarrow \omega_{2n+p}$ фотоны могут оказаться различны. Это требует в общем случае четыре поляризационных индекса $i, j, l, s \in \{y, z\}$ для лестничных операторов, порождающих начальный и конечный векторы состояний:

$$|i\rangle = |1_n^i\rangle \otimes |1_n^j\rangle \otimes |1_p^l\rangle = a_{i,n}^+ a_{j,n}^+ a_{l,p}^+ |0\rangle, \quad |f\rangle = |1_{2n+p}^s\rangle = a_{s,2n+p}^+ |0\rangle.$$

Так как ближайшее вычисление отличается от выкладок предыдущего раздела только векторами состояний, нет нужды вновь находить спаривания лестничных операторов с электрическим и магнитным полями. Общая формула (33) разбивается на слагаемые таким же образом (34), как в одномодовом режиме, за исключением определения усреднения:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= 4i\kappa S \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{L_x} dx \langle 0 | a_{s,2n+p}^- : \mathbf{E}^4 - 2\mathbf{B}^2\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^4 + 4\beta(\mathbf{BE})^2 : a_{i,n}^+ a_{j,n}^+ a_{l,p}^+ | 0 \rangle = \\ &= \left\{ \langle E_y^4 \rangle + 2 \langle E_y^2 E_z^2 \rangle + \langle E_z^4 \rangle \right\} - 2 \left\{ \langle B_y^2 E_y^2 \rangle + \langle B_y^2 E_z^2 \rangle + \langle B_z^2 E_y^2 \rangle + \langle B_z^2 E_z^2 \rangle \right\} \\ &\quad + \left\{ \langle B_y^4 \rangle + 2 \langle B_y^2 B_z^2 \rangle + \langle B_z^4 \rangle \right\} + 4\beta \left\{ \langle B_y^2 E_y^2 \rangle + 2 \langle B_y E_y B_z E_z \rangle + \langle B_z^2 E_z^2 \rangle \right\}, \\ \text{где отличается только } & \langle F \rangle := 4i\kappa S \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{L_x} dx \langle 0 | a_{s,2n+p}^- : F : a_{i,n}^+ a_{j,n}^+ a_{l,p}^+ | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Для разнообразия, вычислим на этот раз слагаемое другого типа, содержащее всевозможные спаривания:

$$\begin{aligned} \langle B_y B_z E_y E_z \rangle &= 4i\kappa S \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{L_x} dx \left\{ \langle 0 | \underbrace{a_{s,2n+p}^- : B_y B_z E_y E_z :}_{\substack{\text{спаривание} \\ \text{из} \\ \text{и} \\ \text{и}}} \underbrace{a_{i,n}^+ a_{j,n}^+ a_{l,p}^+ | 0 \rangle} + \right. \\ &\quad + \langle 0 | \underbrace{a_{s,2n+p}^- : B_y B_z E_y E_z :}_{\substack{\text{спаривание} \\ \text{из} \\ \text{и} \\ \text{и}}} \underbrace{a_{i,n}^+ a_{j,n}^+ a_{l,p}^+ | 0 \rangle} + \langle 0 | \underbrace{a_{s,2n+p}^- : B_y B_z E_y E_z :}_{\substack{\text{спаривание} \\ \text{из} \\ \text{и} \\ \text{и}}} \underbrace{a_{i,n}^+ a_{j,n}^+ a_{l,p}^+ | 0 \rangle} + \\ &\quad \left. + \langle 0 | \underbrace{a_{s,2n+p}^- : B_y B_z E_y E_z :}_{\substack{\text{спаривание} \\ \text{из} \\ \text{и} \\ \text{и}}} \underbrace{a_{i,n}^+ a_{j,n}^+ a_{l,p}^+ | 0 \rangle} + \text{ещё 16 вариантов спариваний} \right\} = \\ &= 4i\kappa S \sqrt{\frac{\omega_{2n+p}\omega_n^2\omega_p}{V^4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_{2n+p}-2\omega_n-\omega_p)t} dt}_{=2\pi\delta(0)} \int_0^{L_x} dx \left\{ \underbrace{\cos(k_{2n+p}x) \cos(k_p x) \sin^2(k_n x)}_{\int dx = -L_x/8} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[-\delta_{sz}\delta_{ly}(-i)^2(1-\delta_{ij}) - \delta_{sy}\delta_{lz}(-i)^2(1-\delta_{ij}) \right] + \underbrace{\sin(k_{2n+p}x) \sin(k_p x) \cos^2(k_n x)}_{\int dx = +L_x/8} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[i(-i)\delta_{sy}\delta_{lz}(\delta_{ij}-1) + i(-i)\delta_{sz}\delta_{ly}(\delta_{ij}-1) \right] + \underbrace{\cos(k_{2n+p}x)\sin(k_p x)\cos(k_n x)\sin(k_p x)}_{\int dx = -L_x/8} \times \\
& \times \left[-\delta_{sz}(-i)^2\delta_{lz}2\delta_{iy}\delta_{jy} - (-i)^2(1-\delta_{ls})(1-\delta_{ij}) + \delta_{sy}(-i)^2\delta_{ly}2(-\delta_{iz})\delta_{jz} \right] + \\
& + \left[-\delta_{sy}i(-i)\delta_{ly}2\delta_{iz}\delta_{jz} - i(-i)(1-\delta_{ls})(1-\delta_{ij}) + \delta_{sz}i(-i)\delta_{lz}2(-\delta_{iy})\delta_{jy} \right] \times \\
& \times \underbrace{\sin(k_{2n+p}x)\cos(k_p x)\cos(k_n x)\sin(k_p x)}_{\int dx = +L_x/8} \Big\} = 2\pi\delta(0) \frac{2i\pi^2\kappa}{L_x^3 S} \sqrt{pn^2(2n+p)} \left[\delta_{ls}\delta_{ij}(\delta_{is}-1)-(1-\delta_{ls})(1-\delta_{ij}) \right].
\end{aligned}$$

Данное вычисление не примечательно комбинаторными множителями, зато демонстрирует максимальное разнообразие возникающих спариваний, приводящее к нетривиальному поляризационному множителю в последних квадратных скобках.

Опуская подобный расчёт остальных кусочков матричного элемента, выпишем финальный результат:

$$T_{fi} = \underbrace{\langle E^4 \rangle - 2\langle B^2 E^2 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle B^4 \rangle + 4\beta \langle (BE)^2 \rangle}_{=0} = 0.$$

В полной аналогии с одномодовым возбуждением резонатора-отрезка, матричный элемент состоит из двух нулевых вкладов от усреднения квадратов инвариантов электромагнитного поля. Значит, генерация комбинационной частоты со знаком «+» ($2\omega_1 + \omega_2$) также запрещена на квантовом уровне, как и рождение фотонов утроенной частоты.

2.2.3. Когерентная генерация

Перед подходом, основанным на квантовой теории поля, была поставлена ещё одна задача: объяснить генерацию комбинационной частоты со знаком «-» в параллелепипеде, предсказываемую классической теорией. Как уже упоминалось, на первый взгляд она выглядит противоестественно, потому что соответствующий процесс с единичными фотонами запрещён законом сохранения энергии $2\omega_{011} + \omega_{110} \not\rightarrow \omega_{130}$.

Здесь стоит вспомнить, что чистые однофотонные состояния являются далеко не лучшими квантовыми аналогами классических волн. При квантовом описании генерации гармоник на отрезке однофотонные векторы состояний были уместны, так как сами процессы были разрешены законом сохранения энергии, и стояла задача выяснить, что ещё может их запрещать. Теперь же мы сталкиваемся с необходимостью объяснить классически разрешённый процесс, который невозможен на уровне единичных фотонов.

Возьмём более точный аналог классической волны — когерентное состояние. Оно удовлетворительно аппроксимирует моду накачки, чья амплитуда велика по квантовым меркам. Для описания генерируемой сигнальной моды мы

по-прежнему обратимся к однофотонному состоянию, это заметно упростит вычисления. Итак, будем считать, что две когерентные моды накачки TM110 и TE011 рождают сигнальные фотоны TM130, не теряя при этом энергию:

$$|i\rangle = |\xi_{011}^{\text{TE}}\rangle \otimes |\eta_{110}^{\text{TM}}\rangle = e^{-\frac{|\xi|^2+|\eta|^2}{2}} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\xi^i \eta^j}{i! j!} (a_{011}^{\text{TE+}})^i (a_{110}^{\text{TM+}})^j |0\rangle,$$

$$|f\rangle = |\xi_{011}^{\text{TE}}\rangle \otimes |\eta_{110}^{\text{TM}}\rangle \otimes |1_{130}^{\text{TM}}\rangle = |i\rangle \otimes |1_{130}^{\text{TM}}\rangle = a_{130}^{\text{TM+}} |i\rangle.$$

Квадраты модулей параметров ξ, η дают средние числа фотонов в модах накачки, и будут использоваться в дальнейшем для связи квантового предсказания с классическим.

Спаривания лестничных операторов $a_{npq}^{\lambda\pm}$ с электрическим и магнитным полями \mathbf{E}, \mathbf{B} в параллелепипеде рассчитываются аналогично резонатору-отрезку с использованием операторного разложения вектор-потенциала (32):

$$\underline{a_{npq}^{\lambda-} \mathbf{E}(t, \mathbf{r})} = i \sqrt{\frac{\omega_{npq}}{2V}} \mathcal{A}_{npq}^{\lambda}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{npq}t} = \left(\underline{\mathbf{E}(t, \mathbf{r})} a_{npq}^{\lambda+} \right)^*,$$

$$\underline{a_{npq}^{\lambda-} \mathbf{B}(t, \mathbf{r})} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{npq}V}} \nabla \times \mathcal{A}_{npq}^{\lambda}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{npq}t} = \underline{\mathbf{B}(t, \mathbf{r})} a_{npq}^{\lambda+}.$$

Используя данные спаривания, приступим к вычислению матричного элемента процесса по формуле (33):

$$\begin{aligned} T_{fi} &= 4i\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_D d\mathbf{r} \langle f | : \mathbf{E}^4 - 2\mathbf{B}^2\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^4 + 4\beta(\mathbf{BE})^2 : | i \rangle = \langle \mathbf{E}^4 \rangle - 2\langle \mathbf{B}^2\mathbf{E}^2 \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{B}^4 \rangle + 4\beta \langle (\mathbf{BE})^2 \rangle, \quad \text{где обозначено } \langle F \rangle := 4i\kappa e^{-|\xi|^2-|\eta|^2} \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \frac{\xi^i \eta^j}{i! j! k! l!} \times \\ &\times \frac{(\xi^*)^k (\eta^*)^l}{k! l!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_D d\mathbf{r} \langle 0 | a_{130}^{\text{TM-}} (a_{011}^{\text{TE-}})^k (a_{110}^{\text{TM-}})^l : F : (a_{011}^{\text{TE+}})^i (a_{110}^{\text{TM+}})^j | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Несмотря на громоздкое четырёхкратное суммирование, возникшее из разложения векторов когерентных состояний в матричном элементе, нахождение кусочков $\langle \mathbf{E}^4 \rangle, \langle \mathbf{B}^4 \rangle, \langle \mathbf{B}^2\mathbf{E}^2 \rangle$ и $\langle (\mathbf{BE})^2 \rangle$ менее трудоёмко, так как поляризации всех фотонов фиксированы. Рассчитаем член $\langle \mathbf{E}^4 \rangle$, как самый компактный в записи:

$$\begin{aligned} &\langle 0 | \underline{a_{130}^{\text{TM-}}} (a_{011}^{\text{TE-}})^k \underline{(a_{110}^{\text{TM-}})^l} : (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) : a_{011}^{\text{TE+}} (a_{011}^{\text{TE+}})^{i-1} (a_{110}^{\text{TM+}})^j | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | \underline{a_{130}^{\text{TM-}}} (a_{011}^{\text{TE-}})^k \underline{(a_{110}^{\text{TM-}})^l} : (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) : a_{011}^{\text{TE+}} (a_{011}^{\text{TE+}})^{i-1} (a_{110}^{\text{TM+}})^j | 0 \rangle = \\ &= \underbrace{e^{i(\omega_{130}-2\omega_{011}+\omega_{110})t}}_{\int dt = 2\pi\delta(0)} (+i)^2 (-i)^2 \sqrt{\frac{\omega_{130}\omega_{011}^2\omega_{110}}{2^4 V^4}} \underbrace{[8li(i-1)]}_{(l-1)!(i-2)!} \underbrace{\delta_{l-1,j} \delta_{k,i-2}}_{\times} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \underbrace{[(\mathcal{A}_{130}^{\text{TM}} \cdot \mathcal{A}_{110}^{\text{TM}})(\mathcal{A}_{011}^{\text{TE}} \cdot \mathcal{A}_{011}^{\text{TE}})]}_{\int d\mathbf{r} = -V/2} + \boxed{2} \underbrace{[(\mathcal{A}_{130}^{\text{TM}} \cdot \mathcal{A}_{011}^{\text{TE}})(\mathcal{A}_{110}^{\text{TM}} \cdot \mathcal{A}_{011}^{\text{TE}})]}_{\int d\mathbf{r} = 0} \Rightarrow \\
& \langle \mathbf{E}^4 \rangle = 2\pi\delta(0) 4\kappa \frac{\sqrt{\omega_{130}\omega_{011}^2\omega_{110}}}{iV} e^{-|\xi|^2-|\eta|^2} \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \frac{\xi^i \eta^j}{i!j!} \frac{(\xi^*)^k (\eta^*)^l}{k!l!} l!i! \delta_{l-1,j} \delta_{k,i-2} = \\
& = 2\pi\delta(0) \frac{4\kappa\xi^2\eta^*}{iV} \sqrt{\omega_{130}\omega_{011}^2\omega_{110}} \left(e^{-|\xi|^2-|\eta|^2} \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2k} |\eta|^{2j}}{k!j!} \right)^1.
\end{aligned}$$

В данном расчёте мы сразу оставили только те варианты спариваний, которые дают «правильные» экспоненты, собирающиеся под временным интегралом в $2\pi\delta(0)$ (все прочие спаривания дают нулевой вклад). Таким образом, на фоне когерентных мод накачки идут однофотонные процессы $2 \rightarrow 2$, разрешённые законом сохранения энергии. При этом необходимы обе моды TM110 и TE011, одномодовая генерация окажется запрещена в согласии с классическим исследованием.

Комбинаторный множитель $\boxed{8li(i-1)}$ теперь зависит от показателей l, i , так как для спариваний выбирается лишь один или два лестничных оператора из l или i штук соответственно. Подчёркнутое выражение образуется, когда *оставшиеся* $l-1$ и $i-2$ операторов рождения спариваются уже не с полями \mathbf{E} , но с операторами $a_{npq}^{\lambda-}$ из бра-вектора (по свойству $\langle 0 | (a^-)^n (a^+)^m | 0 \rangle = n! \delta_{nm}$). Впоследствии, эти символы Кронекера снимают две суммы из четырёх, а лишние факториалы сокращаются. Существенно, что при перенумерации оставшихся индексов суммирования за знак суммы выносится фактор $\xi^2\eta^*$, который при взятии квадрата модуля даст физическую величину — произведение средних количеств фотонов. Наконец, базисные вектор-функции $\mathcal{A}_{npq}^\lambda$ заменяют собой поле \mathbf{E} в скалярных произведениях и образуют при интегрировании по параллелепипеду геометрический множитель.

Подобным образом вычисляются вклады $\langle \mathbf{B}^4 \rangle$, $\langle \mathbf{B}^2 \mathbf{E}^2 \rangle$ и $\langle (\mathbf{B}\mathbf{E})^2 \rangle$ в матричный элемент. Нас интересует только результирующее выражение, притом возведённое в квадрат по модулю:

$$|\mathbf{T}_{\text{fi}}|^2 = [2\pi\delta(0)]^2 \tilde{G}_1^2 \frac{\kappa^2 |\xi|^4 |\eta|^2}{L_z^{10}}, \quad \tilde{G}_1^2 = \frac{2^5 \pi^4 r^6}{\sqrt{5}(1+r^2)} \left[5 + 2\sqrt{5} - \beta (\sqrt{1+r^2} + \sqrt{2}r)^2 \right]^2,$$

где уже учтена настройка резонатора $L_x = L_y = L_z/r$ при $r^2 = \sqrt{5} - 2$, необходимая для точного попадания на спектр $\omega_{130} = 2\omega_{011} - \omega_{110}$.

Осталось сделать последний шаг: привести квантовый расчёт к тому виду, который можно будет сравнить с классическим предсказанием. Для этого займёмся интерпретацией квадрата модуля матричного элемента. Как упоминалось в предваряющем разделе 2.2., удельная вероятность процесса на единицу фазового объёма в единицу времени даётся следующим соотношением:

$$w_{\text{fi}} = |\mathbf{T}_{\text{fi}}|^2 d\Phi, \quad \text{где учтено } \langle f | S | i \rangle = \langle f | i \rangle^0 + \langle f | T | i \rangle.$$

Мы всюду использовали спаривания лестничных операторов с электромагнитным полем в целостном виде, не опуская нормировочные факторы $V^{-1/2}$ и $\sqrt{2\omega}$, поэтому нам не приходится их теперь восстанавливать. Далее, разложение вектор-потенциала электромагнитного поля в ряд, а не в интеграл Фурье делает элемент фазового объёма единичным:

$$d\Phi = V \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = V \frac{\Delta n}{L_x} \frac{\Delta p}{L_y} \frac{\Delta q}{L_z} = 1, \quad \text{в силу того, что } n, p, q \in \mathbb{N}_0.$$

Предложим интерпретацию δ -функции, возникающей в элементе матрицы перехода. Как обычно, её аргумент выражает закон сохранения энергии в процессе:

$$2\pi\delta(0) = 2\pi\delta(\omega_{130} - 2\omega_{011} + \omega_{110}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i0} dt \equiv T.$$

В случае эксперимента на ускорителе формально бесконечные пределы интеграла по времени заменяются на условно бесконечную длительность наблюдения T . Применительно к эксперименту в резонаторе правильным подходом будет положить $T = \tau_\gamma$, где τ_γ — так называемое среднее время жизни сигнального фотона в резонаторе до его диссипации. Такая интерпретация физически обосновывается тем, что равенство нулю аргумента δ -функции наступает при идеально точном попадании на спектр $\omega_{130} = 2\omega_{011} - \omega_{110}$, когда сигнальная мода не затухает. Однако настройка резонатора имеет погрешность, и условие попадания на спектр выполняется лишь с некоторой точностью, ограниченной *добротностью* резонатора на сигнальной частоте ω_{130} . Таким образом, для эксперимента в резонаторе имеем следующую физическую интерпретацию δ -функции:

$$2\pi\delta(0) = \tau_\gamma(\omega_{130}) = \frac{Q}{\omega_{130}} \rightarrow \infty \quad \text{при выключении диссипации.}$$

С учётом вышеприведённых рассуждений об элементе фазового объёма и точности настройки резонатора квантовая теория предсказывает¹ *среднее равновесное количество сигнальных фотонов*:

$$N_{\text{sig}}^{\text{quant}} = \frac{Q^2}{\omega^2} \cdot \tilde{G}_1^2 \frac{\kappa^2 |\xi|^4 |\eta|^2}{L_z^{10}} \cdot 1 = G_1^2 \frac{\kappa^2 Q^2 |\xi|^4 |\eta|^2}{L_z^8}, \quad G_1^2 = \frac{\tilde{G}_1^2}{10\pi^2 r^2}.$$

¹Интересно провести параллель с законом действующих масс в химической кинетике: скорость реакции пропорциональна концентрациям реагентов в степенях, равных соответствующим стехиометрическим коэффициентам. В нашем случае в процессе $2\omega_{011} + \omega_{110} \rightarrow \omega_{130}$ в роли концентраций выступают средние количества «реагирующих» фотонов $N_{011}^{\text{TE}} = |\xi|^2$ и $N_{110}^{\text{TM}} = |\eta|^2$, и вероятность w_{fi} рождения сигнальных фотонов в единицу времени оказывается пропорциональной $|\xi|^4 = (N_{011}^{\text{TE}})^2$ и $|\eta|^2 = (N_{110}^{\text{TM}})^1$, при том что для элементарного акта «реакции» требуется 2 ТЕ-фотона и 1 ТМ-фотон.

Установим связь между средними количествами фотонов в модах накачки и их классическими амплитудами, которые полагались равными друг другу в первой части работы:

$$|\xi|^2 = N_{011}^{\text{TE}} = \int_D \frac{\mathbf{E}_{011}^2 + \mathbf{B}_{011}^2}{2\omega_{011}} d\mathbf{r} = \frac{B_0^2 V}{2\omega_{011}} = \frac{B_0^2 L_z^4}{2\pi r^2 \sqrt{1+r^2}},$$

$$|\eta|^2 = N_{110}^{\text{TM}} = \int_D \frac{\mathbf{E}_{110}^2 + \mathbf{B}_{110}^2}{2\omega_{110}} d\mathbf{r} = \frac{B_0^2 V}{2\omega_{110}} = \frac{B_0^2 L_z^4}{2\sqrt{2}\pi r^3}.$$

Подставляя найденные $|\xi|^2$ и $|\eta|^2$ в формулу для $N_{\text{sig}}^{\text{quant}}$, получаем предсказание квантовой теории поля в форме, удобной для сравнения с классическим предсказанием (30):

$$N_{\text{sig}}^{\text{quant}} = \frac{G_1^2}{2^3 \sqrt{2} \pi^3 r^7 (1+r^2)} \cdot \kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4, \quad (35)$$

$$N_{\text{sig}}^{\text{class}} = \frac{G_0^2}{2\pi 10^{\frac{5}{2}} r^7} \cdot \kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4.$$

Как классический, так и квантовый расчёты приводят к одинаковой зависимости от параметров модели $N_{\text{sig}} \propto \kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4$. Квантовый геометрический коэффициент G_1^2 на первый взгляд даёт множитель, непохожий на классический геометрический фактор (29). Однако подробный анализ показывает, что с учётом всех остальных множителей после явной подстановки $r^2 = \sqrt{5} - 2$ коэффициенты в точности совпадают:

$$\frac{G_1^2}{2^3 \sqrt{2} \pi^3 r^7 (1+r^2)} = \frac{2[5+2\sqrt{5} - (1+\sqrt{5})\beta]^2}{5\sqrt{10} \pi (\sqrt{5}-2)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{5}-1)^2} = \frac{G_0^2}{2\pi 10^{\frac{5}{2}} r^7} \simeq 3.333,$$

благодаря чему тождественны оказываются классическое (30) и квантовое (35) предсказания среднего равновесного количества сигнальных фотонов:

$$N_{\text{sig}}^{\text{class}} = N_{\text{sig}}^{\text{quant}} =: N_{\text{sig}} \simeq 3.333 \cdot \kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4. \quad (36)$$

ВЫВОДЫ

В работе была изучена генерация высших гармоник в простейших моделях резонаторов, обусловленная самодействием электромагнитного поля в нелинейной электродинамике Эйлера-Гейзенберга. Сначала был развит подход в формализме классической теории поля в первом порядке теории возмущений, основанный на методе разделения переменных при решении краевой задачи в математической физике. Его применение показало, что из сигнальных гармоник, возникающих вследствие кубичного смешивания частот двух мод накачки, резонансному усилению не поддаются третья гармоники $3\omega_1, 3\omega_2$, а также следующие за ними по величине комбинационные частоты $2\omega_1 + \omega_2$ и $2\omega_2 + \omega_1$. Тем не менее была предсказана возможность генерации комбинационной гармоники с частотой $2\omega_1 - \omega_2$ в параллелепипеде.

Классическое описание¹ оставило после себя два нерешённых вопроса: в чём причина подавления самых высших сигнальных гармоник; и каким образом согласуется генерация гармоники $2\omega_1 - \omega_2$ с законом сохранения энергии на микроскопическом уровне? Ответы на эти вопросы были найдены в формализме квантовой теории поля.

Квантовое описание генерации гармоник в резонаторах основывалось на операторном квантовании свободного электромагнитного поля в ограниченной области пространства и формализме S -матрицы. Непосредственный расчёт матричных элементов процессов в первом порядке теории возмущений показал, что

- в эффективной теории Эйлера-Гейзенберга резонансная генерация высших частот на уровне единичных фотонов запрещена, и причина этого запрета кроется во *внутренней векторной структуре* квадратов инвариантов электромагнитного поля, так как $\langle \mathcal{F}^2 \rangle = 0$ и независимо $\langle \mathcal{G}^2 \rangle = 0$;
- возможна генерация комбинационной частоты со знаком « $-$ » на фоне *ко-герентных* мод накачки $|\xi_{011}^{\text{TE}}\rangle$ и $|\eta_{110}^{\text{TM}}\rangle$, позволяющих протекать разрешённому элементарному процессу $2\omega_{011} \rightarrow \omega_{110} + \omega_{130}$;
- количественные предсказания среднего равновесного числа сигнальных фотонов, сделанные в рамках классического и квантового описаний, совпадают друг с другом *в точности*, что вполне ожидаемо, так как в данном исследовании оба подхода математически сводятся к вычислению одних и тех же интегралов, только в разной последовательности и с разными множителями.

¹См. также Kopchinskii и Satunin [30]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практическая значимость данной работы заключается в относительно надёжной (полученной двумя идейно различными путями) оценке равновесной энергии сигнальной моды:

$$N_{\text{sig}} \simeq 3.333 \cdot \kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4 \simeq 55 \text{ фотонов},$$

при довольно требовательных, но уже реализуемых на сегодняшний день лабораторных условиях: добротность прямоугольного резонатора $Q = 10^{10}$ (сверхпроводящая ниобиевая полость [28]), амплитуда магнитного поля в каждой из мод накачки $B_0 = 0.1$ Тл (в сумме не превышает критическую индукцию поля для ниобия 0.2 Тл), длина одной из сторон параллелепипеда $L_z = 20$ см, геометрическое соотношение сторон $L_x = L_y = L_z/r$, где $r^2 = \sqrt{5} - 2$.

Стоит отметить, что как для реализации перечисленных условий, так и для подавления теплового фона потребуется экстремальное охлаждение резонатора до температур $T \lesssim 10^{-2} \div 10^{-1}$ К. Перспективой развития данного исследования является получение ограничения на требуемую температуру охлаждения, а также исследование вклада *кубичной нелинейности* в сверхпроводящих стенках резонатора. Данная нелинейность оказывается существенной при амплитудах мод накачки, близких к критическим, и так же порождает высшие гармоники $3\omega_1, 2\omega_1 \pm \omega_2$. Для подавления шумов от стенок может потребоваться ещё более сильное охлаждение резонатора, затруднительное при столь энергичных модах накачки.

С другой стороны, малое количество сигнальных фотонов, порождённых нелинейностью Эйлера-Гейзенберга, может оказаться полезно для нужд поиска новой физики в скалярном секторе. Если предполагаемый вклад в эффективный лагранжиан от взаимодействия электромагнитного поля с аксионами и аксионоподобными частицами имеет вид $C_1 \mathcal{F}^2 + C_2 \mathcal{G}^2$, то можно использовать полученную оценку (36), как необходимый порог, который должно превышать число сигнальных фотонов от новой физики при её поиске в эксперименте с резонатором.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Heisenberg и H. Euler. “Consequences of Dirac’s theory of positrons”. B: *Z. Phys.* 98.11-12 (1936), c. 714—732. DOI: [10.1007/BF01343663](https://doi.org/10.1007/BF01343663). arXiv: [physics/0605038](https://arxiv.org/abs/physics/0605038).
- [2] H. Euler и B. Kockel. “The scattering of light by light in Dirac’s theory”. B: *Naturwiss.* 23.15 (1935), c. 246—247. DOI: [10.1007/BF01493898](https://doi.org/10.1007/BF01493898).
- [3] R. Baier и P. Breitenlohner. “Photon Propagation in External Fields”. B: *Acta Phys. Austriaca* 25 (1967), c. 212—223.
- [4] Z. Bialynicka-Birula и I. Bialynicki-Birula. “Nonlinear effects in Quantum Electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field”. B: *Phys. Rev. D* 2 (1970), c. 2341—2345. DOI: [10.1103/PhysRevD.2.2341](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.2.2341).
- [5] A. A. Anselm. “Axion \leftrightarrow Photon Oscillations in a Steady Magnetic Field. (In Russian)”. B: *Yad. Fiz.* 42 (1985), c. 1480—1483.
- [6] L. Maiani, R. Petronzio и E. Zavattini. “Effects of Nearly Massless, Spin Zero Particles on Light Propagation in a Magnetic Field”. B: *Phys. Lett. B* 175 (1986), c. 359—363. DOI: [10.1016/0370-2693\(86\)90869-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)90869-5).
- [7] Stefan Evans и Johann Rafelski. “Virtual axion-like particle complement to Euler-Heisenberg-Schwinger action”. B: *Phys. Lett. B* 791 (2019), c. 331—334. DOI: [10.1016/j.physletb.2019.03.008](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.03.008). arXiv: [1810.06717 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1810.06717).
- [8] F. Della Valle и др. “First results from the new PVLAS apparatus: A new limit on vacuum magnetic birefringence”. B: *Phys. Rev. D* 90.9 (2014), c. 092003. DOI: [10.1103/PhysRevD.90.092003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.092003). arXiv: [1406.6518 \[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/1406.6518).
- [9] Federico Della Valle и др. “The PVLAS experiment: measuring vacuum magnetic birefringence and dichroism with a birefringent Fabry–Perot cavity”. B: *Eur. Phys. J. C* 76.1 (2016), c. 24. DOI: [10.1140/epjc/s10052-015-3869-8](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3869-8). arXiv: [1510.08052 \[physics.optics\]](https://arxiv.org/abs/1510.08052).
- [10] Gert Brodin, Mattias Marklund и Lennart Stenflo. “Proposal for Detection of QED Vacuum Nonlinearities in Maxwell’s Equations by the Use of Waveguides”. B: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), c. 171801. DOI: [10.1103/PhysRevLett.87.171801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.171801). arXiv: [physics/0108022](https://arxiv.org/abs/physics/0108022).

- [11] Daniel Eriksson и др. “A Possibility to measure elastic photon-photon scattering in vacuum”. B: *Phys. Rev. A* 70 (2004), c. 013808. DOI: [10.1103/PhysRevA.70.013808](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.013808). arXiv: [physics/0411054](https://arxiv.org/abs/physics/0411054).
- [12] Zachary Bogorad и др. “Probing Axionlike Particles and the Axiverse with Superconducting Radio-Frequency Cavities”. B: *Phys. Rev. Lett.* 123.2 (2019), c. 021801. DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.021801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.021801). arXiv: [1902.01418 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1902.01418).
- [13] Marco Gorgetto и др. “Probing CP violation in photon self-interactions with cavities”. B: *JHEP* 10 (2021), c. 056. DOI: [10.1007/JHEP10\(2021\)056](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2021)056). arXiv: [2103.06298 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2103.06298).
- [14] Ryan Janish и др. “Axion production and detection with superconducting RF cavities”. B: *Phys. Rev. D* 100.1 (2019), c. 015036. DOI: [10.1103/PhysRevD.100.015036](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.015036). arXiv: [1904.07245 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1904.07245).
- [15] Christina Gao и Roni Harnik. “Axion searches with two superconducting radio-frequency cavities”. B: *JHEP* 07 (2021), c. 053. DOI: [10.1007/JHEP07\(2021\)053](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2021)053). arXiv: [2011.01350 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2011.01350).
- [16] Dmitry Salnikov и др. “Examining axion-like particles with superconducting radio-frequency cavity”. B: *JHEP* 03 (2021), c. 143. DOI: [10.1007/jhep03\(2021\)143](https://doi.org/10.1007/jhep03(2021)143). arXiv: [2011.12871 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2011.12871).
- [17] Kazunori Shibata. “Intrinsic resonant enhancement of light by nonlinear vacuum”. B: *Eur. Phys. J. D* 74.10 (2020), c. 215. DOI: [10.1140/epjd/e2020-10420-1](https://doi.org/10.1140/epjd/e2020-10420-1).
- [18] Kazunori Shibata. “Long time self-modulation of nonlinear electromagnetic wave in two-dimensional cavity”. B: (2022). DOI: [10.48550/ARXIV.2202.01476](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2202.01476). URL: <https://arxiv.org/abs/2202.01476>.
- [19] F. Achard. “Chapter 44 - James Clerk Maxwell, A treatise on electricity and magnetism, first edition (1873)”. B: *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*. Под ред. I. Grattan-Guinness и др. Amsterdam: Elsevier Science, 2005, c. 564—587. ISBN: 978-0-444-50871-3. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-044450871-3/50125-X>.
- [20] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. “Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8-е изд. стереот.” В: (2003), с. 536 с.

- [21] V. A. Berezhnoy и V. N. Kurdyumov. “Lectures on high-frequency electrodynamics”. B: (2013). DOI: [10.48550/ARXIV.1310.0994](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1310.0994). URL: <https://arxiv.org/abs/1310.0994>.
- [22] Leonard Eges и Richard Friedberg. “The Classical Electromagnetic Field”. B: *Physics Today* 26.7 (1973), c. 53—54. DOI: [10.1063/1.3128144](https://doi.org/10.1063/1.3128144). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.3128144>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3128144>.
- [23] David Hill. “Electromagnetic Fields in Cavities: Deterministic and Statistical Theories”. B: *Antennas and Propagation Magazine, IEEE* 56 (февр. 2014), c. 306—306. DOI: [10.1109/MAP.2014.6821806](https://doi.org/10.1109/MAP.2014.6821806).
- [24] Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков. “Введение в теорию квантованных полей. – 4-е изд.” B: (1984), с. 600 с.
- [25] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, март 2014. ISBN: 978-1-107-03473-0.
- [26] John C. Garrison и Raymond Y. Chiao. *Quantum optics / J.C. Garrison and R.Y. Chiao*. English. Oxford University Press Oxford ; New York, 2008, xiii, 716 p. : ISBN: 978-0-19-850886-1. URL: <http://www.loc.gov/catdir/toc/fy0805/2008299220.html>.
- [27] Gerald V. Dunne. “The Heisenberg-Euler Effective Action: 75 years on”. B: *Int. J. Mod. Phys. A* 27 (2012). Под ред. M. Asorey, M. Bordag и Emilio Elizalde, c. 1260004. DOI: [10.1142/S0217751X12600044](https://doi.org/10.1142/S0217751X12600044). arXiv: [1202.1557 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1202.1557).
- [28] A. Romanenko и др. “Three-dimensional superconducting resonators at $T < 20$ mK with the photon lifetime up to $\tau = 2$ seconds”. B: *Phys. Rev. Applied* 13 (2020), c. 034032. DOI: [10.1103/PhysRevApplied.13.034032](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.13.034032). arXiv: [1810.03703 \[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/1810.03703).
- [29] “<https://github.com/Ilia-Ko/Supplemental-Materials/tree/main/Nonlinear-ED/Part-I>”.
- [30] Ilia Kopchinskii и Petr Satunin. “Resonant generation of electromagnetic modes in nonlinear electrodynamics: Classical approach”. B: *Phys. Rev. A* 105 (1 янв. 2022), c. 013508. DOI: [10.1103/PhysRevA.105.013508](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.105.013508). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.105.013508>.